

# SUR LA DENSITÉ DES REPRÉSENTATIONS CRISTALLINES DE $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$

GAËTAN CHENEVIER

**ABSTRACT.** Let  $\mathfrak{X}_d$  be the  $p$ -adic analytic space classifying the semisimple continuous representations  $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p) \rightarrow \mathrm{GL}_d(\overline{\mathbb{Q}_p})$ . We show that the crystalline representations are Zariski-dense in many irreducible components of  $\mathfrak{X}_d$ , including the components made of residually irreducible representations. This extends to any dimension  $d$  previous results of Colmez and Kisin for  $d = 2$ .

For this we construct an analogue of the infinite fern of Gouvêa-Mazur in this context, based on a study of analytic families of trianguline  $(\varphi, \Gamma)$ -modules over the Robba ring. We show in particular the existence of a universal family of (framed, regular) trianguline  $(\varphi, \Gamma)$ -modules, as well as the density of the crystalline  $(\varphi, \Gamma)$ -modules in this family. These results may be viewed as a local analogue of the theory of  $p$ -adic families of finite slope automorphic forms, they are new already in dimension 2. The technical heart of the paper is a collection of results about the Fontaine-Herr cohomology of families of trianguline  $(\varphi, \Gamma)$ -modules.

## INTRODUCTION

Soient<sup>1</sup>  $\mathbb{F}_q$  un corps fini de caractéristique  $p > 0$ ,  $W$  l'anneau des vecteurs de Witt de  $\mathbb{F}_q$ , et  $F = W[1/p]$ . Si  $K$  est une extension finie de  $\mathbb{Q}_p$  on désigne par  $G_K = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$  son groupe de Galois absolu. Fixons

$$\bar{\rho} : G_{\mathbb{Q}_p} \rightarrow \mathrm{GL}_d(\mathbb{F}_q)$$

une représentation continue absolument irréductible<sup>2</sup> et désignons par  $R$  la  $W$ -algèbre de déformation universelle de  $\bar{\rho}$  au sens de Mazur [Ma1]. Supposons enfin que  $\bar{\rho} \not\cong \bar{\rho}(1)$  (condition automatiquement satisfaite si  $p - 1$  ne divise pas  $d$ ). D'après Tate [Ta]<sup>3</sup>, cela entraîne que  $R \simeq W[[T_0, \dots, T_d]]$ . En particulier, l'espace rigide analytique  $X$  associé par Berthelot à  $R[1/p]$  est la boule unité ouverte  $\{(T_0, \dots, T_d), |T_i| < 1\}$  de dimension  $d^2 + 1$  sur  $F$ .

Rappelons que si  $L$  est une extension finie de  $F$ ,  $X(L)$  paramètre les classes de  $L$ -isomorphie de représentations continues  $G_{\mathbb{Q}_p} \rightarrow \mathrm{GL}_d(\mathcal{O}_L)$  dont la réduction modulo  $\pi_L$  est isomorphe à  $\bar{\rho} \otimes_{\mathbb{F}_q} k_L$ . Bien sûr,  $\mathcal{O}_L$  désigne ici l'anneau des entiers de  $L$ ,  $\pi_L$  en est une uniformisante, et  $k_L = \mathcal{O}_L/\pi_L \mathcal{O}_L$ . Enfin, on dira que  $x \in X(L)$  a une certaine propriété si la représentation associée  $\rho_x : G_{\mathbb{Q}_p} \rightarrow \mathrm{GL}_d(L)$  a cette propriété. Le résultat principal de cet article est le suivant.

**Théorème A :** *Il existe une extension finie  $L$  de  $F$  telle que les points cristallins de  $X(L)$  sont Zariski-denses et d'accumulation dans  $X$ .*

<sup>1</sup> L'auteur est financé par le C.N.R.S.

<sup>2</sup> Cela signifie que  $\bar{\rho}$  est irréductible et le reste après extension des scalaires à  $\overline{\mathbb{F}_p}$ . Rappelons aussi que  $\bar{\rho}$  est nécessairement définie sur le sous-corps de  $\mathbb{F}_q$  engendré par les coefficients des  $\det(t - \bar{\rho}(g))$ ,  $g \in G_{\mathbb{Q}_p}$  (l'obstruction de Schur est vide pour les corps finis), de sorte qu'il n'est pas restrictif de supposer que ce corps est exactement  $\mathbb{F}_q$ , ce que nous faisons désormais par commodité.

<sup>3</sup> En effet, cela entraîne que  $H^2(G_{\mathbb{Q}_p}, \mathrm{ad}(\bar{\rho})) = 0$  et  $\dim_{\mathbb{F}_q} H^1(G_{\mathbb{Q}_p}, \mathrm{ad}(\bar{\rho})) = d^2 + 1$

Autrement dit  $X(L)$  contient au moins un point cristallin et pour tout  $x \in X(L)$  cristallin et tout ouvert affinoïde connexe  $U \subset X$  contenant  $x$  alors l'ensemble des points cristallins de  $U(L)$  est Zariski-dense dans  $U$  : toute fonction rigide analytique sur  $U$  s'annulant sur les points cristallins de  $U(L)$  est identiquement nulle. En fait, on verra que tout  $L$  contenant une extension explicite de  $F$  (de degré  $\leq d^2$ ) convient.

Ce résultat est facile quand  $n = 1$  et démontré indépendamment par Colmez et Kisin quand  $n = 2$  dans [Co1, §5] et [K3, §1]. Leurs preuves sont inspirées de la fougère infinie de Gouvêa et Mazur [Ma2], qui concerne un analogue global du problème qui nous intéresse, et qui est elle-même issue des travaux fondateurs de Coleman [C] sur les familles  $p$ -adiques de formes modulaires. Bien que les techniques employées par Colmez et Kisin soient différentes, leurs approches sont très similaires ; nous nous bornerons ci-dessous à décrire celle de Colmez car c'est son point de vue que nous étendrons par la suite.

Quand  $n = 2$  l'espace  $X$  est une boule de dimension 5. Considérons l'ensemble  $S$  des paires  $(x, t)$  où  $x \in X$  est *trianguline*<sup>4</sup> et où  $t$  est la donnée d'une triangulation de  $x$ . D'après Colmez,  $S$  admet une structure "naturelle" d'espace analytique  $p$ -adique, qui est lisse et de dimension 4. Notons

$$\pi : S \rightarrow X$$

l'application ensembliste  $(x, t) \mapsto x$ . Son image  $\pi(S) \subset X$  est appelée la *fougère infinie*. Colmez démontre que :

- (a)  $\pi(S)$  contient tous les points cristallins de  $X$ . De plus, chaque  $x \in X$  cristallin non exceptionnel<sup>5</sup> admet exactement deux antécédents dans  $S$ .
- (b) Les  $(x, t) \in S$  avec  $x$  cristallin non exceptionnel sont Zariski-denses et d'accumulation dans  $S$ .
- (c)  $\pi$  est localement analytique : pour (presque<sup>6</sup>) tout  $s \in S$  il existe un voisinage affinoïde de  $s$  dans  $S$  (une boule fermée de dimension 4) sur lequel  $\pi$  est une immersion analytique.
- (d) si  $x \in X$  est cristallin non exceptionnel, alors les deux sous-boules<sup>7</sup> de  $X$  passant par  $x$  qui sont données par (a) et (c) ne sont pas confondues.

Comme dans chacune des deux sous-boules mentionnées dans le (d), les points cristallins non exceptionnels sont Zariski-denses par le (b), on obtient une idée de la structure fractale de la fougère infinie dans  $X$  (et une justification pour son nom!). Le théorème ci-dessus s'en déduit aisément. Dans l'approche de Kisin, disons simplement que l'espace  $S$  est remplacé dans cet argument par sa version  $X_{fs}$  construite dans [K1]. La différence essentielle est que Kisin découpe  $X_{fs}$  dans l'espace  $X \times \mathbb{G}_m$  (il doit donc le "majorer", ce qui est assez délicat) alors que Colmez le construit explicitement, ce qui est peut-être plus naturel par rapport à notre problème. Quand  $n = 2$ , mentionnons que ce résultat de densité des cristallines joue un rôle important dans la preuve par Colmez de la correspondance de Langlands locale  $p$ -adique [Co2]. Ajoutons enfin que toujours quand  $n = 2$ , Nakamura a étendu dans [Na] l'approche de Kisin et le théorème ci-dessus au cas où  $G_{\mathbb{Q}_p}$  est remplacé par  $G_K$  avec  $K/\mathbb{Q}_p$  finie arbitraire.

<sup>4</sup>On rappelle, suivant Colmez [Co1], qu'une représentation  $\rho : G_{\mathbb{Q}_p} \rightarrow \mathrm{GL}_d(L)$  est dite trianguline si son  $(\varphi, \Gamma)$ -module pris sur l'anneau de Robba est extension successive  $(\varphi, \Gamma)$ -modules de rang 1. Nous appellerons le choix d'une telle extension une triangulation de  $\rho$ .

<sup>5</sup>Précisément, si le Frobenius cristallin de  $D_{\mathrm{cris}}(\rho_x)$  est semi-simple.

<sup>6</sup>Le presque ici fait référence au fait que pour Colmez le paramètre de  $(s, t)$  doit être  $p$ -régulier, notion qui sera introduite plus tard (cette hypothèse n'est d'ailleurs plus nécessaire grâce au théorème 3.9).

<sup>7</sup>Ces deux familles sont les analogues locaux des deux familles de Coleman passant par les deux formes jumelles associées à une forme modulaire propre et  $p$ -ancienne.

Notre démonstration reprend pour  $d$  quelconque les étapes de la preuve esquissée ci-dessus. L'ensemble  $S$ , ainsi que la fougère infinie, sont définis de la même manière. Son étude a été amorcée par Bellaïche et l'auteur dans [BCh, §2]. Une conséquence simple des travaux de Berger est que les triangulations d'une représentation cristalline  $V$  de dimension  $d$  quelconque sont en bijection avec les drapeaux  $\varphi$ -stables de  $D_{\text{cris}}(V)$ , de sorte que génériquement (au sens naïf) il y en a  $d!$ . C'est la généralisation du (a) dont nous aurons besoin ici. De plus, mentionnons que bien que l'on n'y munisse pas  $S$  d'une structure analytique, une étude du voisinage infinitésimal de chaque point est aussi menée *loc. cit.*, ce qui est un premier pas en direction (c), tout en étant insuffisant<sup>8</sup> pour le théorème A. Les généralisations de (b) et (c) à la dimension  $d$  formeront le coeur technique et nouveau de cet article, et nous y reviendrons plus loin en détail. Un point assez délicat concerne la généralisation du (d) : en un point cristallin  $x \in X$  assez général, la fougère infinie admet  $d!$  feuilles chacune étant de dimension  $\frac{d(d+1)}{2} + 1$ , et le problème est de comprendre leurs positions relatives. Ce problème est facile à résoudre pour des raisons de dimension quand  $d = 2$ , car une analyse ad-hoc des paramètres triangulins sur chacune des deux feuilles de dimension 4 montre que les deux feuilles ne sont pas confondues. Le cas général est nettement plus délicat, mais a déjà été résolu par l'auteur dans [Ch3] (en fait dans [Ch1]). Le résultat clé est que si  $x$  cristallin est assez générique en un sens précis rappelé plus bas, alors la somme des espaces tangents en  $x$  des  $d!$  feuilles de la fougère en  $x$  est l'espace tangent de  $X$  en  $x$  tout entier. L'argument d'adhérence Zariski employé dans [Ch3] permet alors de conclure : nous renvoyons à la section 4.1 pour l'argument complet.

Revenons sur la structure analytique de l'espace  $S$ . Nous raisonnerons entièrement dans le monde des  $(\varphi, \Gamma)$ -modules sur l'anneau de Robba (non nécessairement étales), ce qui est essentiellement permis par un théorème de Kedlaya et Liu [KeL]. Si  $A$  est une  $\mathbb{Q}_p$ -algèbre affinoïde, on note  $\mathcal{R}_A$  l'anneau de Robba à coefficients dans  $A$  (voir § 1.1 pour la définition précise). Soient  $\text{Aff}$  la catégorie des  $\mathbb{Q}_p$ -algèbres affinoïdes et

$$F_d^\square : \text{Aff} \longrightarrow \text{Ens}$$

le foncteur associant à  $A$  l'ensemble des classes d'équivalence de  $(\varphi, \Gamma)$ -modules sur  $\mathcal{R}_A$  qui sont triangulins, réguliers et rigidifiés : nous renvoyons à la section 3 pour les définitions de ces termes.<sup>9</sup>

**Théorème B :** *Le foncteur  $F_d^\square$  est représentable par un espace analytique  $p$ -adique  $S_d^\square$  qui est irréductible et lisse sur  $\mathbb{Q}_p$ , de dimension  $\frac{d(d+3)}{2}$ . Les  $(\varphi, \Gamma)$ -modules cristallins sont Zariski-denses et d'accumulation dans  $S_d^\square$ .*

Ce théorème peut être vu comme un analogue local de la théorie des variétés de Hecke (ou "*eigenvarieties*").<sup>10</sup> Notons que sa première partie est nouvelle même pour  $d = 2$ , où elle complète des résultats de Colmez et de Kisin. Toujours dans le cas  $d = 2$ , nous construisons en fait une famille "tautologique" des  $(\varphi, \Gamma)$ -modules non nécessairement réguliers (Théorème 3.9). Mentionnons que la notion de rigidification utilisée fait que l'espace  $S_d^\square$  admet moralement  $d - 1$  dimensions de plus que sa définition naïve, en revanche elle permet de traiter sur un pied d'égalité tous les  $(\varphi, \Gamma)$ -triangulins (y compris ceux qui sont scindés

<sup>8</sup>Mentionnons qu'il semble difficile d'appliquer le théorème d'approximation d'Artin pour relever les germes formels de familles de  $(\varphi, \Gamma)$ -modules triangulins construits dans [BCh, §2] en des vrais germes de familles analytiques. Cela vient entre autres de ce que nous ne savons pas démontrer que les foncteurs sous-jacents sont de présentation finie, question qui nous semble assez profonde.

<sup>9</sup>Précisions tout de même que dans toute la suite, un  $(\varphi, \Gamma)$ -module triangulin est la donnée d'un  $(\varphi, \Gamma)$ -module muni d'une filtration (la filtration fait partie de la donnée).

<sup>10</sup>Le fait que l'analogue "automorphe" global de ce résultat était déjà connu est aussi la raison pour laquelle nous avons étudié le cas global en premier dans [Ch3]. Ces deux contextes comportent des similarités évidentes mais aussi des différences importantes, par exemple on ne dispose malheureusement pas en global d'analogue de la proposition 4.3 (ii).

par exemple). Le théorème *B* a des conséquences intéressantes concernant la construction de représentations cristallines ayant certaines propriétés. Par exemple il permet de montrer que si  $\bar{\rho} : G_{\mathbb{Q}_p} \rightarrow \mathrm{GL}_d(\mathbb{F}_q)$  est une représentation semi-simple continue quelconque, il existe une extension finie  $L/\mathbb{Q}_p$  et une représentation  $G_{\mathbb{Q}_p} \rightarrow \mathrm{GL}_d(L)$  cristalline absolument irréductible dont la représentation résiduelle est  $\bar{\rho}$  (Prop. 4.11).

Le coeur technique du théorème *B*, et de cet article, est un ensemble de résultats sur les  $(\varphi, \Gamma)$ -modules sur  $\mathcal{R}_A$ , notamment sur leur cohomologie à la Fontaine-Herr ([He1],[He2]). Ceci fait l'objet de la section 2. Une étape de la démonstration est la vérification dans ce contexte que les complexes  $C_{\varphi, \gamma}$  et  $C_{\psi, \gamma}$  sont quasi-isomorphes comme dans la théorie classique de Herr, ce qui avait notamment été conjecturé par Kedlaya dans [Ke, §2.6]. Concrètement, il s'agit d'étudier la structure de  $D^{\psi=0}$  comme  $\Gamma$ -module quand  $D$  est un  $(\varphi, \Gamma)$ -module sur  $\mathcal{R}_A$  ou sur  $\mathcal{R}_A^+$ . Ce point assez technique repose sur une étude préliminaire des familles de  $\Gamma$ -modules effectuée en section 1. Notre preuve est directement inspirée de [Co2, §V] qui en démontre le cas particulier où  $A$  est un corps.

Nous calculons enfin la cohomologie de  $\mathcal{R}_A(\delta)$  quand  $\delta : \mathbb{Q}_p^* \rightarrow A^*$  est un caractère continu, étendant des résultats de Colmez (en degrés 0 et 1, [Co1]) et de Liu (en degré 2, [L]) dans le cas particulier où  $A$  est un corps. Notre preuve, bien qu'inspirée de celle de Colmez, est en fait un peu plus simple que celle dans [Co1] : l'idée nouvelle essentielle est de remplacer son dévissage pour se ramener au cas où  $v(\delta(p)) < 0$  par un argument direct utilisant la transformée de ... Colmez ! qui est un dévissage de l'anneau de Robba. Nous décrivons de plus la structure de  $\mathcal{R}_A(\delta)^{\psi=1}$  comme module sur une certaine complétion de  $A[\Gamma]$  notée  $\mathcal{R}_A^+(\Gamma)$ . Nous étendons enfin ces résultats à tous les  $(\varphi, \Gamma)$ -modules triangulins sur  $\mathcal{R}_A$ . Mentionnons qu'une des spécificités de cette théorie en famille est l'absence de dualité. De plus, le coeur (au sens de Fontaine) d'une famille de  $(\varphi, \Gamma)$ -modules sur  $\mathcal{R}_A$  n'est pas nécessairement libre sur  $\mathcal{R}_A^+(\Gamma)$ . Voici un échantillon des résultats obtenus.

**Théorème C :** *Si  $D$  est un  $(\varphi, \Gamma)$ -module triangulin de rang  $d$  sur  $\mathcal{R}_A$ , alors  $H^i(D)$  est de type fini sur  $A$  pour tout  $i$  et dans le groupe de Grothendieck des  $A$ -modules de type fini on a la relation  $[H^0(D)] - [H^1(D)] + [H^2(D)] = -[A^d]$ . De plus, la formation des  $H^i(D)$  commute à tout changement de base plat affinoïde. Enfin,  $D^{\psi=1}$  contient un  $\mathcal{R}_A^+(\Gamma)$ -module libre de rang  $d$ , le quotient étant de type fini sur  $A$ .*

*Si  $D$  est régulier, alors  $H^0(D) = H^2(D) = 0$  et  $H^1(D)$  est libre de rang  $d$  sur  $A$ . La formation des  $H^i(D)$  commute alors à tout changement de base affinoïde. Si  $D$  est  $p$ -régulier, alors  $D^{\psi=1}$  est libre de rang  $d$  sur  $\mathcal{R}_A^+(\Gamma)$ .*

L'auteur remercie chaleureusement Pierre Colmez pour les explications précieuses de ses résultats, dont les § 1.5 et § 2.6 sont très largement inspirés, ainsi que Laurent Fargues et Olivier Taïbi pour des discussions utiles.

## TABLE DES MATIÈRES

Introduction	1
1. $(\varphi, \Gamma)$ -modules sur $\mathcal{R}_A$	5
2. Cohomologie des $(\varphi, \Gamma)$ -modules triangulins sur $\mathcal{R}_A$	12
3. L'espace des $(\varphi, \Gamma)$ -modules triangulins sur $\mathcal{R}_A$	27
4. Démonstration du théorème <i>A</i>	36
Références	44

1.  $(\varphi, \Gamma)$ -MODULES SUR  $\mathcal{R}_A$ 

**1.1. Quelques anneaux de fonctions analytiques.** Nous renvoyons à [BGR] pour les généralités sur les espaces analytiques  $p$ -adiques au sens de Tate. Si  $X$  est un tel espace, nous noterons  $\mathcal{O}(X)$  la  $\mathbb{Q}_p$ -algèbre de ses fonctions globales. Quand  $X$  est affinoïde, c'est une algèbre de Banach noethérienne, et on note aussi  $X = \text{Sp}(\mathcal{O}(X))$ . En général, on munit  $\mathcal{O}(X)$  de la topologie de la convergence uniforme sur tout ouvert affinoïde, c'est une algèbre de Fréchet si  $X$  admet un recouvrement dénombrable admissible par des affinoïdes, ce qui sera le cas pour tous les espaces ci-dessous. Si  $X$  est réunion admissible d'ouverts affinoïdes  $X_n$  ( $n \geq 0$ ) avec  $X_n \subset X_{n+1}$ , c'est une algèbre de Fréchet-Stein au sens de [ST, §3].<sup>11</sup>

Soit  $A$  une  $\mathbb{Q}_p$ -algèbre affinoïde. Un *modèle* de  $A$  est une sous- $\mathbb{Z}_p$ -algèbre  $\mathcal{A} \subset A$  topologiquement de type fini, i.e. quotient de  $\mathbb{Z}_p\langle t_1, \dots, t_m \rangle$  pour un certain  $m \geq 1$ , et telle que  $\mathcal{A}[1/p] = A$ . Un modèle est ouvert, borné, sans  $p$ -torsion, et complet séparé pour la topologie  $p$ -adique. Pour toute famille finie  $x_1, \dots, x_r$  d'éléments de  $A$  à puissances (positives) bornées, il existe toujours un modèle  $\mathcal{A}$  de  $A$  contenant les  $x_i$ . Si  $A$  est réduit, l'ensemble de ses éléments à puissances bornées est le plus grand modèle de  $A$  (Tate). Si  $|\cdot|$  est une norme sur  $A$  (sous-entendu, sous-multiplicative et pour laquelle  $A$  est complet), alors sa boule unité  $A^0$  est un modèle de  $A$ .

Soit  $I \subset [0, 1[$  un intervalle d'extrémités dans  $p^{\mathbb{Q}}$ , on note  $B_I$  l'ouvert admissible de la droite affine rigide  $\mathbb{A}^1$  (de paramètre  $T$ ) défini par  $|T| \in I$ . C'est un disque si  $0 \in I$  et une couronne sinon, il est affinoïde si  $I$  est un segment. On notera encore  $T \in \mathcal{O}(B_I)$  le paramètre tautologique. Soit  $A$  une  $\mathbb{Q}_p$ -algèbre affinoïde. Si  $I \subset [0, 1[$  est un intervalle on pose

$$\mathcal{E}_A^I := \mathcal{O}(\text{Sp}(A) \times B_I).$$

- Si  $0 \in I$ ,  $\mathcal{E}_A^I \subset A[[T]]$  est aussi la sous-algèbre des séries  $f = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n T^n$  telles que pour tout  $r \in I$  on ait  $|a_n| r^n \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$ . C'est une  $A$ -algèbre de Fréchet pour les normes  $|f|_{[0, r]} := \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n| r^n$ , si  $|\cdot|$  est une norme fixée sur  $A$ .
- Si  $0 \notin I$ ,  $\mathcal{E}_A^I$  est aussi la  $A$ -algèbre des séries de Laurent  $f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n T^n$  telles que pour tout  $[r, s] \subset I$  on ait  $|a_n| s^n \rightarrow 0$  et  $|a_{-n}| r^{-n} \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$ . C'est une  $A$ -algèbre de Fréchet pour les normes  $|f|_{[r, s]} := \sup(\sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n| s^n, \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_{-n}| r^{-n})$ , où  $[r, s] \subset I$ .

Notons que les descriptions ci-dessus sont classiques quand  $I$  est un segment, et s'en déduisent en général en considérant le recouvrement admissible de  $\text{Sp}(A) \times B_I$  par les  $\text{Sp}(A) \times B_J$  pour  $J \subset I$  un segment. De plus,  $\mathcal{E}_A^I$  est une algèbre affinoïde si  $I$  est un segment et de Fréchet-Stein en général (considérer le recouvrement par les  $\text{Sp}(A) \times B_{I_n}$  où  $I_n$  est une suite croissante de segments recouvrant  $I$ ).

On pose encore

$$\mathcal{R}_{A, r} = \mathcal{E}_A^{[r, 1]}, \quad \mathcal{R}_A = \bigcup_{0 < r < 1} \mathcal{R}_{A, r}, \quad \text{et} \quad \mathcal{R}_A^+ = \mathcal{R}_{A, 0}.$$

<sup>11</sup>Une conséquence de cette propriété est l'existence d'une sous-catégorie pleine, abélienne, naturelle de celle des  $\mathcal{O}(X)$ -modules que Schneider et Teitelbaum nomment "co-admissibles" : un  $\mathcal{O}(X)$ -module est dit co-admissible si il est la limite projective d'une suite de  $\mathcal{O}(X_n)$ -modules de type fini  $M_n$  munis d'isomorphismes  $M_{n+1} \otimes_{\mathcal{O}(X_{n+1})} \mathcal{O}(X_n) \rightarrow M_n$  pour tout  $n \geq 0$ . Ces modules ont par définition une topologie canonique de  $\mathcal{O}(X)$ -module de Fréchet. Les  $\mathcal{O}(X)$ -modules de présentation finie sont admissibles, ainsi que tous leurs sous-modules de type fini et plus généralement fermés. Nous renvoyons à *loc. cit* pour plus de renseignements. Nous n'aurons recours à ces résultats que dans la preuve du lemme 1.3 (iv) (lui-même utilisé uniquement pour le théorème 2.33).

Lorsque  $A = \mathbb{Q}_p$  on omettra souvent de le mentionner en indice. Par exemple  $\mathcal{R} := \mathcal{R}_{\mathbb{Q}_p}$  et  $\mathcal{E}^I := \mathcal{E}_{\mathbb{Q}_p}^I$ . De plus, si  $X = \mathrm{Sp}(A)$  on remplacera parfois  $A$  par  $X$  dans les notations ci-dessus, de sorte que par exemple  $\mathcal{E}_X^I := \mathcal{E}_{\mathcal{O}(X)}^I$ .

Il sera commode par la suite d'introduire certains modèles sur  $\mathbb{Z}_p$  des anneaux ci-dessus.

**Lemme 1.2.** *Soit  $I = [p^{-\frac{a}{n}}, p^{-\frac{b}{m}}]$  avec  $a, b, m, n$  entiers tels que  $0 \leq \frac{a}{n} \leq \frac{b}{m}$  (on suppose les dénominateurs non nuls et les fractions réduites). Alors  $\mathcal{O}^I := \mathbb{Z}_p\langle \frac{T^m}{p^b}, \frac{p^a}{T^n}, T \rangle$  est un modèle de  $\mathcal{E}^I$ .*

*De plus, le morphisme surjectif naturel  $\mathbb{Z}_p\langle T, U, V \rangle / (p^b U - T^m, T^n V - p^a) \rightarrow \mathcal{O}^I$  a pour noyau la  $p^\infty$ -torsion de  $\mathbb{Z}_p\langle T, U, V \rangle / (p^b U - T^m, T^n V - p^a)$*

*Preuve* — En effet, par définition de  $B_I$  on a  $\mathcal{E}^I = \mathbb{Q}_p\langle T, U, V \rangle / (p^b U - T^m, T^n V - p^a)$ , donc les éléments  $\frac{T^m}{p^b}, \frac{p^a}{T^n} \in \mathcal{E}^I$  sont à puissances bornées et  $\mathcal{O}^I$  est un modèle de  $\mathcal{E}^I$  car image de  $\mathbb{Z}_p\langle T, U, V \rangle$ . La dernière assertion suit car le morphisme de l'énoncé est un isomorphisme après avoir inversé  $p$ .  $\square$

Si  $I$  est un segment on définit  $\mathcal{O}^I$  comme dans le lemme ci-dessus. Si  $\mathcal{A}$  est un modèle de  $A$ , alors  $\mathcal{O}_{\mathcal{A}}^I := \widehat{\mathcal{A} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}^I}$  est un modèle de  $\mathcal{E}_{\mathcal{A}}^I$ .

Enfin, on pose  $\mathcal{E}_{\mathcal{A}}^{\dagger, 0} =: \mathcal{A}[[T]]$ , et si  $n \geq 1$ , on définit  $\mathcal{E}_{\mathcal{A}}^{\dagger, n}$  comme étant le complété de  $\mathcal{A}[[T]][\frac{p}{T^n}]$  pour la topologie  $p$ -adique. C'est aussi l'anneau des séries de Laurent de la forme  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k T^k$  telles que  $a_k \in \mathcal{A}$  pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $a_{-k} \in p^{\alpha_k} \mathcal{A}$  pour  $k \geq 0$ , où  $\alpha_k$  est une suite d'entiers  $\geq [\frac{k}{n}]$  et tendant vers l'infini avec  $k$ . En particulier,  $\mathcal{E}_{\mathcal{A}}^{\dagger, n} \subset \mathcal{R}_{A, p^{-\frac{1}{n}}}$ . On le munit de sa *topologie faible* : une base de voisinages de 0 est l'ensemble des  $p^\alpha \mathcal{E}_{\mathcal{A}}^{\dagger, n} + T^\beta \mathcal{A}[[T]]$ ,  $\alpha, \beta \geq 0$  entiers. Il est aussi complet pour cette topologie. Nous renvoyons à [S, §17] pour les généralités sur les produits tensoriels complétés. Le (i) ci-dessous fait notamment le lien entre les définitions employées ici et celles de [KeL] et de [BeCo].

**Lemme 1.3.** (i) *Pour tout  $I$ , l'application naturelle  $A \widehat{\otimes}_{\mathbb{Q}_p} \mathcal{E}^I \rightarrow \mathcal{E}_A^I$  est un isomorphisme de Fréchet.*

(ii) *Pour tout  $0 < r < 1$ , la norme  $|\cdot|_{[0, r]}$  sur  $\mathcal{R}_A^+$  induit sur  $\mathcal{A}[[T]]$  la topologie définie par l'idéal  $(p, T)\mathcal{A}[[T]]$ , ou ce qui revient au même, la topologie faible dont une base de voisinages de 0 est donnée par les  $p^\alpha \mathcal{A}[[T]] + T^\beta \mathcal{A}[[T]]$  avec  $\alpha, \beta \geq 0$ . L'injection naturelle  $\mathcal{A}[[T]] \rightarrow \mathcal{R}_A^+$  est d'image fermée.*

(iii) *Pour tout  $n \geq 1$  et  $p^{-1/n} \leq s < 1$ , la norme  $|\cdot|_{[p^{-1/n}, s]}$  induit sur  $\mathcal{E}_{\mathcal{A}}^{\dagger, n} \subset \mathcal{R}_{A, p^{-1/n}}$  la topologie faible. En particulier,  $\mathcal{E}_{\mathcal{A}}^{\dagger, n}$  est fermé dans  $\mathcal{R}_{A, p^{-1/n}}$ .*

(iv) *Si  $J$  est un idéal de  $A$  et  $I$  est un intervalle quelconque de  $[0, 1[$ , alors l'application naturelle  $\mathcal{E}_A^I / J\mathcal{E}_A^I \rightarrow \mathcal{E}_{A/J}^I$  est un isomorphisme.*

(v) *Pour tout intervalle  $I$  de  $[0, 1[$ , le  $A$ -module  $\mathcal{E}_A^I$  est plat. En particulier,  $\mathcal{R}_A$  est plat sur  $A$ .*

*Preuve* — Quand  $I$  est un segment,  $B_I$  est affinoïde et le (i) est évident. En général, l'injectivité de  $A \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_p^{\mathbb{Z}} \rightarrow A^{\mathbb{Z}}$  entraîne celle de  $\iota_I : A \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathcal{E}^I \rightarrow \mathcal{E}_A^I$ . Si  $J \subset I$  est un segment, on a une semi-norme naturelle produit-tensoriel  $|\cdot|_J := |\cdot| \otimes |\cdot|_J$  sur  $A \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathcal{E}^I$  associée :  $|x|_J$  est l'infimum sur toutes les écritures  $x = \sum_i a_i \otimes f_i$  des  $\sup_i |a_i| |f_i|_J$ . En

particulier,  $|\iota_I(x)|_J \leq |x|_J$  pour tout  $x \in A \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathcal{E}^I$ . Réciproquement, considérons le diagramme commutatif évident

$$\begin{array}{ccc} A \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathcal{E}^I & \xrightarrow{\iota_I} & \mathcal{E}_A^I \\ \mu \downarrow & & \downarrow \\ A \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathcal{E}^J & \xrightarrow{\iota_J} & \mathcal{E}_A^J \end{array}$$

D'après [S, Prop. 17.4 (iii)],  $|\mu(x)|_J = |x|_J$  pour tout  $x \in A \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathcal{E}^I$ . De plus, le cas d'un segment entraîne qu'il existe une constante  $C_J > 0$  telle que  $|x|_J \leq C_J |\iota(x)|_J$  pour tout  $x$  dans  $A \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathcal{E}^J$ . Ainsi,  $|\cdot|_J$  et  $|\iota_I(\cdot)|_J$  sont équivalentes sur  $A \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathcal{E}^I$ . On conclut car  $\mathcal{E}_A^I$  est un Fréchet contenant  $A \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathcal{E}^I$  comme sous-espace dense.

Le premier point du (ii) est un exercice classique sans difficulté laissé au lecteur. Comme  $\mathcal{A}[[T]]$  est complet pour la topologie  $(p, T)$ -adique, c'est un sous-espace fermé de  $\mathcal{R}_A^+$  et le (ii) suit. Pour le (iii), on constate sur la description donnée plus haut de  $\mathcal{E}_A^{\dagger, n}$  que  $\mathcal{E}_A^{\dagger, n} = T\mathcal{A}[[T]] \oplus (\oplus_{i=0}^{n-1} T^i \mathbb{Z}_p \langle \frac{p}{T^n} \rangle)$  est une somme directe topologique, les termes de droite étant respectivement munis de la topologie  $(p, T)$ -adique pour le premier et de la topologie  $p$ -adique pour le second. Par définition des  $|\cdot|_J$  sur  $\mathcal{R}_{A,r}$ , cette somme directe est une isométrie pour chaque  $|\cdot|_J$  (les termes de droites étant munis de la norme induite). Le premier point du (iii) se déduit alors de celui du (ii). Le (iii) suit car  $\mathcal{E}_A^{\dagger, n}$  est complet pour la topologie faible. Comme il est complet pour cette topologie, cela conclut.

Pour démontrer le (iv) il faut voir si  $f \in \mathcal{E}_A^I$  a tous ses coefficients dans  $J$  (vue comme série de Laurent), alors  $f \in J\mathcal{E}_A^I$ . Soient  $e_1, \dots, e_g$  une famille finie de générateurs de  $J$  comme  $A$ -module, d'après Tate la surjection  $(A\text{-linéaire}) A^g \rightarrow I$  qui s'en déduit est nécessairement ouverte. En particulier il existe une constante  $C > 0$  telle que tout élément  $x \in J$  s'écrive sous la forme  $\sum_i x_i e_i$  avec  $|x_i| \leq C|x|$  pour tout  $i$ . Ainsi, appliquant ceci à tous les coefficients d'un  $f \in \mathcal{E}_A^I$  à coefficients dans  $J$ , il vient que  $f \in J\mathcal{E}_A^I$ .

Prouvons enfin (v). Si  $I$  est un segment, alors  $\mathcal{E}_A^I = A \widehat{\otimes}_{\mathbb{Q}_p} \mathcal{E}^I$  est isomorphe à  $A\langle t \rangle$  comme  $A$ -module, et il est bien connu que ce dernier est plat sur  $A$ . En effet, si  $\mathcal{A} \subset A$  est un modèle de  $A$ , alors  $\mathcal{A}\langle t \rangle$  est plat sur  $\mathcal{A}[[T]]$  comme complété de ce dernier (qui est un anneau noethérien) pour la topologie  $p$ -adique, et donc plat sur  $\mathcal{A}$ . On conclut en inversant  $p$ . En général, on écrit  $\mathcal{E}_A^I$  est comme limite projective de  $\mathcal{E}_A^{I_n}$  pour une suite arbitraire croissante  $I_n$  de segments recouvrant  $I$ . Soit  $0 \rightarrow P \rightarrow Q \rightarrow R \rightarrow 0$  une suite exacte de  $A$ -modules de type fini. Par platitude de  $\mathcal{E}_A^{I_n}$  sur  $A$  pour tout  $n \geq 0$  (cas précédent), on dispose d'un système projectif de suites exactes  $0 \rightarrow P_n \rightarrow Q_n \rightarrow R_n \rightarrow 0$  où  $X_n := X \otimes_A \mathcal{E}_A^{I_n}$  (la famille  $(X_n)$  définit donc un  $\mathcal{E}_A^I$ -module cohérent au sens de Schneider-Teitelbaum). D'après [ST, §3, Thm.], c'est un fait général que cette suite reste exacte après passage à la limite projective sur  $n$ . Pour conclure, il suffit de voir que si  $X$  est un  $A$ -module de type fini, alors l'application naturelle

$$X \otimes_A \mathcal{E}_A^I \rightarrow \text{proj lim}_n X_n$$

est un isomorphisme. C'est clair si  $X$  est libre et cela suit en général si l'on choisit une présentation  $L \rightarrow L' \rightarrow X \rightarrow 0$  avec  $L, L'$  libres de type fini sur  $A$ , et considère le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} L \otimes_A \mathcal{E}_A^I & \longrightarrow & L' \otimes_A \mathcal{E}_A^I & \longrightarrow & X \otimes_A \mathcal{E}_A^I & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \text{proj lim}_n L_n & \longrightarrow & \text{proj lim}_n L'_n & \longrightarrow & \text{proj lim}_n X_n & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

dont les suites horizontales sont exactes (par exactitude à droite du produit tensoriel pour celle du haut et par [ST, §3, Thm.] pour celle du bas) et les deux verticales de gauche sont des isomorphismes. L'assertion sur  $\mathcal{R}_A$  suit car c'est une limite inductive filtrante de  $\mathcal{E}_A^I$ .  $\square$

Le groupe  $\Gamma := \mathbb{Z}_p^*$  agit par automorphismes des  $B_I$  par la formule

$$(1.1) \quad \gamma(T) = (1 + T)^\gamma - 1 = \sum_{n \geq 1} \binom{\gamma}{n} T^n \in \mathbb{Z}_p[[T]],$$

de sorte que  $|\gamma(t)| = |t|$  si  $|t| < 1$ . Si  $A$  est une algèbre affinoïde sur  $\mathbb{Q}_p$ , cette action de  $\Gamma$  s'étend donc en une action  $A$ -linéaire sur  $\mathcal{E}_A^I$ , et en fait sur tous les anneaux introduits ci-dessus.

**Lemme 1.4.** *Soient  $A$  une algèbre affinoïde sur  $\mathbb{Q}_p$  et  $\mathcal{A} \subset A$  un modèle.*

- (i) *Si  $I$  est un segment, l'application induite  $\Gamma \rightarrow \text{End}_A(\mathcal{E}_A^I)$  est continue.*
- (ii) *Si  $1 \leq n \leq m$ ,  $I = [p^{-1/n}, p^{-1/m}]$  et  $\gamma \in 1 + 2p^M \mathbb{Z}_p$  alors  $(\gamma - 1)\mathcal{O}_A^I \subset T^M \mathcal{O}_A^I$ .*

(Le terme à droite dans (i) est l'algèbre des endomorphismes  $A$ -linéaires continus du  $A$ -module de Banach  $\mathcal{E}_A^I$ , c'est une  $A$ -algèbre de Banach pour la norme d'opérateurs).

*Preuve* — L'action de  $\Gamma$  étant  $A$ -linéaire, on peut supposer  $A = \mathbb{Q}_p$  et  $\mathcal{A} = \mathbb{Z}_p$  dans (i) et (ii). Vérifions (i), il suffit par multiplicativité de montrer la continuité en  $1 \in \Gamma$ . Écrivons  $I = [p^{-a/n}, p^{-b/m}]$  (resp.  $I = [0, p^{-b/m}]$ ). Soient  $U = \frac{T^m}{p^b}$  et  $V = \frac{p^a}{T^n}$ , ainsi que  $\mathcal{O}^I = \mathbb{Z}_p\langle U, V, T \rangle \subset \mathcal{E}^I$  (resp.  $\mathbb{Z}_p\langle U, T \rangle$ ) le modèle de  $\mathcal{E}^I$  défini au lemme 1.2. Si  $\gamma \in \Gamma$  alors

$$\begin{aligned} \gamma(U) &= \gamma(T)^m / p^b = \gamma^m U \left( 1 + \sum_{k \geq 2} \frac{\binom{\gamma}{k}}{\gamma} T^{k-1} \right)^m \in U \mathbb{Z}_p\langle U \rangle[T] \\ \gamma(V) &= \frac{p^a}{\gamma(T)^n} = \gamma^{-n} V \left( 1 + \sum_{k \geq 2} \frac{\binom{\gamma}{k}}{\gamma} T^{k-1} \right)^{-n} \in V \mathbb{Z}_p\langle U \rangle[T]. \end{aligned}$$

(car  $\mathbb{Z}_p[[T]] \subset \mathbb{Z}_p\langle U \rangle[T]$ ). En particulier,  $\Gamma$  préserve  $\mathcal{O}^I$ . Notons que  $T^m \in p\mathcal{O}^I$ . Ainsi, si  $M \geq 1$  est un entier suffisamment grand pour que  $\binom{\gamma}{i} \in p\mathbb{Z}_p$  si  $i = 2, \dots, m$  et  $\gamma \in 1 + p^M \mathbb{Z}_p$ , les formules ci-dessus entraînent que  $1 + p^M \mathbb{Z}_p$  agit trivialement sur  $\mathcal{O}^I / p\mathcal{O}^I$ . L'identité

$$(1.2) \quad W^p - 1 \equiv (W - 1)^p \pmod{p(W - 1)\mathbb{Z}[W]}$$

montre alors que  $(\gamma - 1)\mathcal{O}^I \subset p^N \mathcal{O}^I$  si  $\gamma \in 1 + 2p^{M+N-1} \mathbb{Z}_p$ , ce qui termine la preuve du (i).

Vérifions donc (ii). Les formules pour  $\gamma(T)$ ,  $\gamma(U)$  et  $\gamma(V)$  données ci-dessus montrent alors que  $\mathcal{O}^I$  et  $T\mathcal{O}^I$  sont  $\Gamma$ -stables, puis que  $\gamma$  agit trivialement sur  $\mathcal{O}^I / T\mathcal{O}^I$  (car sur les images de  $U$  et  $V$ ) dès que  $\gamma \in 1 + p\mathbb{Z}_p$ . Cela démontre le (ii) pour  $M = 1$ . On en déduit que pour tout  $i \geq 0$  et tout  $\gamma \in 1 + p\mathbb{Z}_p$ , alors  $(\gamma - 1)T^i \mathcal{O}^I \subset T^{i+1} \mathcal{O}^I$ . En effet, cela vient par récurrence sur  $i$  de la formule  $(\gamma - 1)(ab) = (\gamma - 1)(a)\gamma(b) + (\gamma - 1)(b)a$  et de ce que

$$(\gamma - 1)(T) \in (T^2, pT)\mathbb{Z}_p[[T]] \subset T^2 \mathcal{O}^I$$

(car  $p = VT^n \in T\mathcal{O}^I$ ). En particulier,  $(\gamma - 1)^j T^i \mathcal{O}^I \subset T^{i+j} \mathcal{O}^I$  pour tout  $i, j \geq 0$  et  $\gamma \in 1 + p\mathbb{Z}_p$ . Le (ii) suit alors pour tout  $M$ , encore par récurrence sur  $M$ , en utilisant cette fois-ci l'identité (1.2) et encore le fait que  $p = VT^n \in T\mathcal{O}^I$ .  $\square$



**1.5. Préliminaire sur les familles de  $\Gamma$ -modules.** Soit  $A$  une  $\mathbb{Q}_p$ -algèbre affinoïde et  $N \geq 0$  un entier. On définit un  $\Gamma$ -module sur  $\mathcal{E}_A^{\dagger, N}$  comme étant un  $\mathcal{E}_A^{\dagger, N}$ -module  $D$  libre de rang fini muni d'une action semi-linéaire de  $\Gamma$  qui soit continue, *i.e.* telle qu'il existe une base  $e_1, \dots, e_d$  de  $D$  sur  $\mathcal{E}_A^{\dagger, N}$  pour laquelle l'application  $\gamma \in \Gamma \mapsto \text{Mat}(\gamma) \in M_d(\mathcal{E}_A^{\dagger, N})$  associant à  $\gamma$  sa matrice dans la base  $(e_i)$  soit continue coefficient par coefficient. On vérifierait aisément à l'aide des lemmes 1.4 (i) et 1.3 (ii) et (iii) que si cela vaut pour une base alors cela vaut pour toutes.

Pour tout segment  $I \subset [p^{-\frac{1}{N}}, 1[$ , on a un morphisme naturel  $\mathcal{E}_A^{\dagger, N} \rightarrow \mathcal{O}_A^I$ , de sorte qu'il y a un sens à considérer  $D^I = D \otimes_{\mathcal{E}_A^{\dagger, N}} \mathcal{O}_A^I$ .

**Lemme 1.6.** *Soit  $s \geq 0$  un entier. Il existe un entier  $M \geq 1$  tel que  $\forall \gamma \in 1 + p^M \mathbb{Z}_p$  :*

- (a)  $(\gamma - 1)D^I \subset T^s D^I$  pour tout  $I = [p^{-1/m}, p^{-1/m'}]$  avec  $1 \leq m \leq m'$  et  $m \geq N$ ,
- (b) et de plus  $(\gamma - 1)D^{[0, p^{-1/2}]} \subset p^s D^{[0, p^{-1/2}]}$  si  $N = 0$ .

*Preuve* — Supposons d'abord  $N \geq 1$ . Par continuité de  $\Gamma$ , on peut choisir  $M \geq s$  tel que pour tout  $\gamma \in 1 + p^M \mathbb{Z}_p$  on ait  $\text{Mat}(\gamma) - \text{id} \in p^s M_d(\mathcal{E}_A^{\dagger, n}) + T^s M_d(\mathcal{A}[[T]])$ . Mais  $p \in T^N \mathcal{E}_A^{\dagger, N}$ , donc  $\text{Mat}(\gamma) - \text{id} \in T^s M_d(\mathcal{E}_A^{\dagger, N})$ . En particulier, si  $1 \leq m \leq m'$ ,  $m \geq N$  et  $I = [p^{-1/m}, p^{-1/m'}]$ , alors

$$(\gamma - 1)(e_i) \in T^s D^I, \quad \forall \gamma \in 1 + p^M \mathbb{Z}_p, \quad \forall i = 1, \dots, d.$$

On conclut alors le (a) par l'identité

$$(\gamma - 1)\left(\sum_i x_i e_i\right) = \sum_i (\gamma - 1)(x_i) \gamma(e_i) + x_i (\gamma - 1)(e_i),$$

et le lemme 1.4 (ii). Si  $N = 0$ , le fait que l'on puisse choisir  $M$  de sorte que (a) soit satisfait découle du cas précédent en considérant le  $\Gamma$ -module sur  $\mathcal{E}_A^{\dagger, 1}$  obtenu par extension des scalaires. Pour vérifier (b) on procède de même que ci-dessus en remarquant par exemple que  $T^2 \in p\mathcal{O}_I$  si  $I = [0, p^{-1/2}]$  et en utilisant le lemme 1.4 (i).  $\square$

Terminons par une proposition qui jouera un rôle important dans la suite. Fixons  $D$  un  $\Gamma$ -module sur  $\mathcal{E}_A^{\dagger, N}$ . Si  $\gamma \in \Gamma$ , considérons l'application

$$G_\gamma : D \rightarrow D, \quad x \mapsto Tx + (1 + T) \cdot (\gamma - 1)(x),$$

c'est un endomorphisme  $A$ -linéaire de  $D$ . On considère le morphisme de  $A$ -algèbres  $A[G_\gamma] \rightarrow \mathcal{R}_{A, p^{-1/n}}$  envoyant  $G_\gamma$  sur  $T$ .

**Proposition 1.7.** *Il existe un entier  $M \geq 1$  tel que pour tout  $\gamma \in 1 + p^M \mathbb{Z}_p$ , et pour tout  $n \geq N$ , le  $A[G_\gamma]$ -module  $D^{(n)} = D \otimes_{\mathcal{E}_A^{\dagger, N}} \mathcal{R}_{A, p^{-1/n}}$  s'étend de manière unique en un  $\mathcal{R}_{A, p^{-1/n}}$ -module noté<sup>12</sup>  $D'^{(n)}$  tel que l'application structurelle  $\mathcal{R}_{A, p^{-1/n}} \times D'^{(n)} \rightarrow D'^{(n)}$  soit continue. De plus, si  $(e_i)$  est une base de  $D$  sur  $\mathcal{E}_A^{\dagger, N}$  alors  $(e_i \otimes 1)$  est une base de  $D'^{(n)}$  sur  $\mathcal{R}_{A, p^{-1/n}}$ .*

La topologie sous-entendue sur  $D'^{(n)}$  dans cet énoncé est celle de  $\mathcal{R}_{A, p^{-1/n}}$ -module de Fréchet  $D^{(n)}$  sous-jacent (qui est libre de rang fini par définition).

*Preuve* — Appliquons le lemme précédent pour  $s = 2$ . Fixons une fois pour toutes  $\gamma \in 1 + p^M \mathbb{Z}_p$ , où  $M$  est donné par ce lemme. Soit  $I = [p^{-1/m}, p^{-1/m'}]$  avec  $m \geq N$  et  $m \geq 1$ , et considérons  $D^I$ . C'est un  $\mathcal{O}_A^I$ -module libre de rang  $d$ , il est en particulier

<sup>12</sup>Comme  $A$ -module, on a donc  $D'^{(n)} = D^{(n)} \dots$

complet pour la topologie  $p$ -adique, et aussi pour la topologie  $T$ -adique (car  $\mathcal{O}_A^I$  l'est, puisque  $T^{m'}\mathcal{O}_A^I \subset p\mathcal{O}_A^I$ ). L'anneau  $\mathcal{B}^I = \text{End}_A(\mathcal{O}_A^I)$  est donc lui aussi complet pour les topologies  $p$ -adique et  $T$ -adique. En particulier, si on pose

$$\psi(x) := \frac{1+T}{T}(\gamma - 1)(x)$$

alors  $\psi(D^I) \subset TD^I$  par choix de  $M$ , en particulier  $\psi \in \mathcal{B}^I$ , mais aussi  $\sum_{k \geq 0} (-1)^k \psi^k$  converge dans  $\mathcal{B}^I$ , vers un inverse de  $1 + \psi$ . De plus, on a évidemment  $\psi(TD^I) \subset TD^I$ , donc  $\psi$  induit l'endomorphisme nul sur  $D^I/TD^I$ . Si on note  $m_u$  la multiplication par  $u$ , nous avons donc montré que :

- (i)  $G_\gamma = m_T \cdot (1 + \psi)$  dans  $\mathcal{B}^I$  et  $G_\gamma \equiv m_T$  dans  $\text{End}_{\mathcal{O}^I/(T)}(D^I/TD^I)$ .
- (ii)  $\frac{G_\gamma^{m'}}{p} = m_{\frac{T^{m'}}{p}} \cdot (1 + \psi)^{m'} \in \mathcal{B}^I$  et  $\frac{G_\gamma^{m'}}{p} \equiv m_{\frac{T^{m'}}{p}}$  dans  $\text{End}_{\mathcal{O}^I/(T)}(D^I/TD^I)$ .
- (iii)  $\frac{p}{G_\gamma^m} = m_{\frac{p}{T^m}} \cdot (\sum_{k \geq 0} (-1)^k \psi^k)^m \in \mathcal{B}^I$  et  $\frac{p}{G_\gamma^m} \equiv m_{\frac{p}{T^m}}$  dans  $\text{End}_{\mathcal{O}^I/(T)}(D^I/TD^I)$ .

Comme  $\mathcal{B}^I$  est complet pour la topologie  $p$ -adique, et comme  $\mathcal{O}^I$  est par définition de quotient de  $\mathbb{Z}_p\langle T, U, V \rangle / (pU - T^m, T^{m'}V - p)$  par sa  $p$ -torsion (lemme 1.2), il découle de (i), (ii) et (iii) que le morphisme naturel  $\mathcal{A}[G_\gamma] \rightarrow \mathcal{B}^I$  s'étend en un morphisme continu  $\mathcal{E}_A^I \rightarrow \mathcal{B}^I$ . On note  $D'^I$  le groupe abélien  $D^I$  muni de cette structure de  $\mathcal{E}_A^I$ -module. Comme  $1 + \psi$  est inversible dans  $\mathcal{B}^I$ , notons que  $T^k D'^I = G_\gamma^k D^I = T^k D^I$  pour tout  $k \geq 0$ , puis que  $D'^I$  est complet pour la topologie  $T$ -adique et sans  $T$ -torsion. Considérons l'application identité

$$D^I/TD^I \rightarrow D'^I/TD'^I.$$

Le (i), (ii) et (iii) ci-dessus assurent que cette application est un morphisme de  $\mathcal{O}_A^I$ -modules. En particulier,  $D'^I/(T)$  est libre comme  $\mathcal{E}_A^I/(T)$ -module. Comme  $D'^I$  et  $\mathcal{E}_A^I$  sont complets pour la topologie  $T$ -adique et sans  $T$ -torsion, un raisonnement standard montre que  $D'^I$  est libre sur  $\mathcal{E}_A^I$ , et qu'une famille  $(e_i)$  est une base de  $D^I$  si et seulement si c'est une base de  $D'^I$ . Quand  $n = 0$ , on traite le cas de  $I = [0, p^{-1/2}]$  par un raisonnement entièrement analogue en ne considérant que la topologie  $p$ -adique (et non pas  $T$ -adique, c'est en fait seulement plus simple il n'y a pas de condition de type (iii) à vérifier).

Pour terminer, il ne reste qu'à "recoller" les  $D^I[1/p]$ . Pour cela, fixons  $n \geq N$  et considérons l'ensemble  $\mathcal{I}$  des intervalles de  $[p^{-1/n}, 1[$  de la forme  $[p^{-1/m}, p^{-1/m'}]$  avec  $m \leq m'$ , ou de la forme  $[0, p^{-1/2}]$  (ce qui ne se produit que si  $n = 0$ ). Si  $J \subset I$  sont dans  $\mathcal{I}$  on a bien sûr un morphisme de restriction

$$r_{I,J} : D^I[1/p] \rightarrow D^J[1/p].$$

Si  $I, J \in \mathcal{I}$ , alors  $I \cap J = \emptyset$  ou  $I \cap J \in \mathcal{I}$ . Comme les  $B_I$  avec  $I \in \mathcal{I}$  recouvrent admissiblement  $B_{[p^{-1/n}, 1]}$ , il vient que  $D^{(n)}$  (resp.  $\mathcal{R}_{A, p^{-1/n}}$ ) s'identifie à la limite projective sur  $\mathcal{I}$  des  $\mathcal{E}_A^I$ -modules  $D^I[1/p]$  (resp. des  $\mathcal{E}_A^I$ ). Il est de plus immédiat sur la construction ci-dessus que si  $f \in \mathcal{E}_A^I$  et  $v \in D^I[1/p]$ , alors  $r_{I,J}(f * v) = r_{I,J}(f) * r_{I,J}(v)$  où  $*$  désigne ici la structure de module de  $D'^I[1/p]$  et  $D'^J[1/p]$  sur  $\mathcal{E}_A^I$  et  $\mathcal{E}_A^J$ . Cela nous permet d'une part de munir  $D^{(n)}$  d'une structure de  $\mathcal{R}_{A, p^{-1/n}}$ -module, disons  $D'^{(n)}$ , en posant  $(f_I) * (v_I) := (f_I * v_I)$ . D'autre part, si  $(e_i)$  est une base de  $D$  sur  $\mathcal{E}_A^{\dagger, N}$  nous avons vu que  $e_i \otimes 1$  est une base de  $D'^I[1/p]$  sur  $\mathcal{E}_A^I$ , on en déduit que  $D'^{(n)}$  est libre sur  $\mathcal{R}_{A, p^{-1/n}}$  de base  $e_i \otimes 1$ .

Le choix d'une base de  $D$  munit  $D^{(n)} = \oplus_i \mathcal{R}_{A, p^{-1/n}} e_i$  d'une structure d'espace de Fréchet qui ne dépend pas du choix de la base  $(e_i)$ . La continuité de  $\mathcal{R}_{A, p^{-1/n}} \times D'^{(n)} \rightarrow D'^{(n)}$  se déduit alors de celle des  $\mathcal{E}_A^I \times D'^I[1/p] \rightarrow D'^I[1/p]$ . L'assertion d'unicité vient plus précisément de ce qu'il existe au plus une structure de  $\mathcal{R}_{A, p^{-1/n}}$ -module telle que pour tout

$v \in D^{(n)}$ , l'application  $f \mapsto f * v$  soit continue, car  $A[T, T^{-1}]$  (resp.  $A[[T]]$ ) est dense dans  $\mathcal{R}_{A, p^{-1/n}}$  si  $n \geq 1$  (resp. si  $n = N = 0$ ).  $\square$

**1.8. Familles de  $(\varphi, \Gamma)$ -modules sur l'anneau de Robba.** Soit  $A$  une  $\mathbb{Q}_p$ -algèbre affinoïde. Les anneaux  $\mathcal{R}_A^+$  et  $\mathcal{R}_A$  sont munis d'un endomorphisme d'anneaux  $\varphi$  défini par

$$\varphi(f)(T) = f((1+T)^p - 1)$$

et qui commute à l'action de  $\Gamma$ . Plus précisément, supposons  $r = 0$  ou  $r > p^{-\frac{1}{(p-1)}}$ , on dispose d'un morphisme analytique  $\varphi_* : B_{[r, 1[} \rightarrow B_{[r^p, 1[}$  défini par  $t \mapsto (1+t)^p - 1$  et  $\varphi$  est par définition le morphisme  $\mathcal{R}_{A, r^p} \rightarrow \mathcal{R}_{A, r}$  qui s'en déduit. Il est évident sur la formule pour  $\varphi_*$  que  $\varphi$  commute à l'action de  $\Gamma$ .

Un  $(\varphi, \Gamma)$ -module sur  $\mathcal{R}_A$  est un  $\mathcal{R}_A$ -module  $D$  libre et de rang fini muni d'actions semi-linéaires de  $\varphi$  et  $\Gamma$  qui commutent et satisfaisant les axiomes suivants. D'une part on demande que  $\varphi$  envoie une  $\mathcal{R}_A$ -base de  $D$  sur une  $\mathcal{R}_A$ -base de  $D$ , i.e.  $\mathcal{R}_\varphi(D) = D$ . D'autre part, on demande que l'action de  $\Gamma$  soit continue au sens suivant : il existe une  $\mathcal{R}_A$ -base  $e_1, \dots, e_d$  de  $D$  et  $r \in [0, 1[$  tels que si  $\gamma \mapsto \text{Mat}(\gamma)$  désigne la matrice de  $\gamma \in \Gamma$  dans cette base, alors  $M(\gamma) \in M_d(\mathcal{R}_{A, r})$  pour tout  $\gamma \in \Gamma$  et l'application  $\Gamma \rightarrow M_d(\mathcal{R}_{A, r})$ ,  $\gamma \mapsto M(\gamma)$ , est continue (coefficient par coefficient). On dira que  $D$  est  $\Gamma$ -borné si on peut trouver un modèle  $\mathcal{A} \subset A$ , un entier  $n \geq 0$ , et une  $\mathcal{R}_A$ -base  $e_i$  de  $D$  dans laquelle  $\text{Mat}(\gamma) \in M_d(\mathcal{E}_{\mathcal{A}}^n)$  pour tout  $\gamma \in \Gamma$ . Il résulte du lemme 1.3 (iii) que le  $\Gamma$ -module  $\oplus_i \mathcal{E}_{\mathcal{A}}^n e_i$  qui s'en déduit est bien un  $\Gamma$ -module sur  $\mathcal{E}_{\mathcal{A}}^n$  au sens du § 1.5.

Les  $(\varphi, \Gamma)$ -modules sur  $\mathcal{R}_A$  forment une catégorie  $A$ -linéaire  $\text{FG}_A$  s'il on considère pour  $\text{Hom}_{\text{FG}_A}(D_1, D_2)$  les applications  $\mathcal{R}_A$ -linéaires qui commutent à  $\Gamma$  et à  $\varphi$ .

L'intérêt des  $(\varphi, \Gamma)$ -modules sur  $\mathcal{R}_A$  réside dans leurs liens avec les représentations continues  $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p) \rightarrow \text{GL}_d(A)$  (Fontaine, Cherbonnier-Colmez, Kedlaya, Berger-Colmez, Kedlaya-Liu) pour lequel nous renvoyons à Berger-Colmez [BeCo] et Kedlaya-Liu [KeL]. La condition  $\Gamma$ -bornée introduite ci-dessus n'est pas standard, et apparaît ici pour des raisons techniques. Bien que nous n'utiliserons pas ce résultat, mentionnons que la méthode de Berger-Colmez [BeCo], généralisant un résultat de Colmez-Cherbonnier, assure que si  $M$  est un  $\mathcal{A}$ -module libre muni d'une action  $\mathcal{A}$ -linéaire continue de<sup>13</sup>  $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ , alors on peut lui associer un  $(\varphi, \Gamma)$ -module sur  $\mathcal{R}_A$  qui est  $\Gamma$ -borné.

Enfin, définissons un  $(\varphi, \Gamma)$ -module sur  $\mathcal{R}_A^+$  comme étant un  $\mathcal{R}_A^+$ -module  $D$  libre de rang fini muni d'actions semi-linéaires de  $\varphi$  et  $\Gamma$  qui commutent, telles que  $\varphi(D)$  contienne une  $\mathcal{R}_A^+$ -base de  $D$ , et telles qu'il existe une  $\mathcal{R}_A^+$ -base  $e_1, \dots, e_d$  de  $D$  dans laquelle  $\gamma \mapsto \text{Mat}(\gamma)$  (la matrice de  $\gamma \in \Gamma$  dans cette base) soit continue. On dira encore que  $D$  est  $\Gamma$ -borné si on peut trouver un modèle  $\mathcal{A} \subset A$  et une  $\mathcal{R}_A^+$ -base  $e_i$  de  $D$  dans laquelle  $\text{Mat}(\gamma) \in M_d(\mathcal{A}[[T]])$  pour tout  $\gamma \in \Gamma$ . Il résulte du lemme 1.3 (ii) que le  $\Gamma$ -module  $\oplus_i \mathcal{A}[[T]] e_i$  qui s'en déduit est bien un  $\Gamma$ -module sur  $\mathcal{A}[[T]]$  au sens du § 1.5.

Les  $(\varphi, \Gamma)$ -modules sur  $\mathcal{R}_A$  qui nous intéressent principalement dans cet article sont les  $(\varphi, \Gamma)$ -modules triangulins, variante en famille d'une notion introduite par Colmez dans [Co1]. Soit  $\mathcal{T}$  l'espace analytique  $p$ -adique paramétrant les caractères continus de  $\mathbb{Q}_p^*$  : pour toute algèbre affinoïde  $A$ ,  $\mathcal{T}(A)$  est l'ensemble des morphismes continus  $\mathbb{Q}_p^* \rightarrow A^*$ . Il est bien connu que cet espace est isomorphe au produit de  $\mathbb{G}_m$  par l'espace  $\mathcal{W}$  des caractères continus  $p$ -adiques de  $\mathbb{Z}_p^*$ , lui-même étant une réunion disjointe finie de boules unités

<sup>13</sup>Rappelons que d'après [Ch4, lemme 3.18], une représentation continue  $\rho : G \rightarrow \text{GL}_d(A)$  d'un groupe profini  $G$  étant donnée, on peut toujours trouver un recouvrement fini de  $X$  par des affinoïdes  $U_i$ , ainsi que des modèles  $\mathcal{A}_i \subset \mathcal{O}(U_i)$ , tels que pour tout  $i$  la représentation  $\rho \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{O}(U_i)$  de  $G$  sur  $\mathcal{O}(U_i)^d$  stabilise un sous- $\mathcal{A}_i$ -module libre  $L_i$  de rang  $d$  tel que  $L_i[1/p] = \mathcal{O}(U_i)^d$ .

ouvertes. Si  $\delta \in \mathcal{T}(A)$ , i.e. si  $\delta : \mathbb{Q}_p^* \rightarrow A^*$  est un morphisme continu de groupes, on définit un  $(\varphi, \Gamma)$ -module  $\mathcal{R}_A(\delta)$  de rang 1 sur  $\mathcal{R}_A$ , disons  $\mathcal{R}_A(\delta) = \mathcal{R}_A e$ , par la formule  $\gamma(e) = \delta(\gamma)e$  pour tout  $\gamma \in \Gamma$  et  $\varphi(e) = \delta(p)e$ . On définit de même  $\mathcal{R}_A^+(\delta)$  de manière évidente.

**Définition 1.9.** *Un  $(\varphi, \Gamma)$ -module triangulin sur  $\mathcal{R}_A$  est la donnée d'un  $(\varphi, \Gamma)$ -module  $D$  sur  $\mathcal{R}_A$  et d'une suite croissante  $(\text{Fil}_i(D))_{i=0, \dots, d}$ ,  $d = \text{rg}_{\mathcal{R}_A}(D)$ , de sous  $\mathcal{R}_A$ -modules de  $D$  stables par  $\varphi$  et  $\Gamma$  telle que  $\text{Fil}_0(D) = 0$ ,  $\text{Fil}_d(D) = D$ , et telle que pour chaque  $i = 1, \dots, d-1$ ,  $\text{Fil}_i(D)/\text{Fil}_{i-1}(D) \simeq \mathcal{R}_A(\delta_i)$  pour un certain  $\delta_i \in \mathcal{T}(A)$ .*

Nous verrons plus bas (Lemme 1.10) que la suite des  $\delta_i$  est uniquement déterminée par  $(\text{Fil}_i(D))$ , nous l'appelons le *paramètre* de  $D$ . Notons aussi que  $\text{Fil}_i(D)$  est libre de rang  $i$  sur  $\mathcal{R}_A$ , et facteur direct dans  $D$  comme  $\mathcal{R}_A$ -module.

Terminons ce paragraphe par un sorite sur l'extension des scalaires. Soit  $B$  une  $A$ -algèbre affinoïde. On dispose pour chaque  $0 < r < 1$  d'un morphisme continu d'anneaux  $\mathcal{R}_{A,r} \rightarrow \mathcal{R}_{B,r}$  induisant à la limite un morphisme  $\mathcal{R}_A \rightarrow \mathcal{R}_B$ . Si  $D$  est un  $(\varphi, \Gamma)$ -module sur  $\mathcal{R}_A$  on note

$$D \widehat{\otimes}_A B$$

le  $\mathcal{R}_B$ -module  $D \otimes_{\mathcal{R}_A} \mathcal{R}_B$  : c'est un  $(\varphi, \Gamma)$ -module sur  $\mathcal{R}_B$  de manière naturelle. On pourrait justifier cette notation en le voyant comme un produit tensoriel complété mais cela ne sera pas nécessaire. On a défini ainsi un foncteur  $- \widehat{\otimes}_A B : (\varphi, \Gamma)/A \rightarrow (\varphi, \Gamma)/B$ . Si  $I$  est un idéal de  $A$ , le lemme 1.3 (iv) entraîne que  $\mathcal{R}_A/I\mathcal{R}_A = \mathcal{R}_{A/I}$  et donc que  $D \widehat{\otimes}_A A/I = D/ID$  pour tout  $(\varphi, \Gamma)$ -module  $D$  sur  $\mathcal{R}_A$ . Si  $I = m_x$  est l'idéal maximal correspondant à  $x \in \text{Sp}(A)$ , on posera aussi

$$D_x := D/m_x D,$$

c'est un  $(\varphi, \Gamma)$ -module sur  $k(x) := A/m_x$  (une extension finie de  $\mathbb{Q}_p$ ).

Par exemple, si  $\delta \in \mathcal{T}(A)$  alors  $\mathcal{R}_A(\delta) \widehat{\otimes}_A B = \mathcal{R}_B(\delta')$  où  $\delta' \in \mathcal{T}(B)$  est le caractère  $\delta$  composé par  $A^* \rightarrow B^*$ . Notons que si  $0 \rightarrow D \rightarrow D' \rightarrow D'' \rightarrow 0$  est une suite exacte de  $(\varphi, \Gamma)$ -modules sur  $\mathcal{R}_A$ , elle est scindée comme suite de  $\mathcal{R}_A$ -modules, et induit donc une suite exacte de  $(\varphi, \Gamma)$ -modules sur  $\mathcal{R}_B$  après extension des scalaires. En particulier, si  $(D, \text{Fil}_\bullet(D))$  est  $(\varphi, \Gamma)$ -module triangulin sur  $\mathcal{R}_A$ , alors  $D \widehat{\otimes}_A B$  est triangulin sur  $\mathcal{R}_B$  pour la filtration  $\text{Fil}_i(D) \widehat{\otimes}_A B$ .

**Lemme 1.10.** *Si  $\delta, \delta' \in \mathcal{T}(A)$ , alors  $\mathcal{R}_A(\delta) \simeq \mathcal{R}_A(\delta')$  si et seulement si  $\delta = \delta'$ .*

*Preuve* — En effet, si  $A$  est artinien c'est [BCh, Prop. 2.3.1]. En général, on remarque que si  $I$  est un idéal de  $A$  alors  $\mathcal{R}_A(\delta) \otimes_A A/I = \mathcal{R}_{A/I}(\delta \bmod I)$ . On conclut car si  $A$  est une  $\mathbb{Q}_p$ -algèbre affinoïde alors l'intersection de ses idéaux de codimension finie est nulle par le théorème d'intersection de Krull, et donc  $A$  se plonge dans le produit des  $A/I$  avec  $I$  de codimension finie.  $\square$

Terminons par une question, dont une réponse (affirmative) ne semble connue que lorsque  $A$  est artinien :

**Question:** Est-ce que tout  $(\varphi, \Gamma)$ -module de rang 1 sur  $\mathcal{R}_A$  est isomorphe à un  $\mathcal{R}_A(\delta)$  ?

## 2. COHOMOLOGIE DES $(\varphi, \Gamma)$ -MODULES TRIANGULINS SUR $\mathcal{R}_A$

L'objectif de cette partie est de calculer la cohomologie des  $(\varphi, \Gamma)$ -modules triangulins sur  $\mathcal{R}_A$ .

**2.1. Généralités sur la cohomologie des  $(\varphi, \Gamma)$ -modules.** Si  $D$  est un  $(\varphi, \Gamma)$ -module sur  $\mathcal{R}_A$ , et si  $\gamma \in \Gamma$  est un générateur topologique<sup>14</sup> on rappelle que suivant Fontaine et Herr [He1] on dispose du complexe  $C_{\varphi, \gamma}(D)^\bullet$  :

$$0 \rightarrow D \xrightarrow{x \mapsto (\varphi-1)x + (\gamma-1)x} D \times D \xrightarrow{(x, y) \mapsto (\gamma-1)x - (\varphi-1)y} D \rightarrow 0,$$

le premier  $D$  étant placé en degré 0. On désigne par  $H^i(D)$  la cohomologie de ce complexe, ce sont donc des  $A$ -modules nuls en degré  $i \notin \{0, 1, 2\}$ . Par définition,  $H^0(D) = \text{Hom}_{\text{FG}_A}(\mathcal{R}_A, D)$ . De plus,

**Lemme 2.2.**  $H^1(D)$  est canoniquement isomorphe à  $\text{Ext}_{\text{FG}_A}(\mathcal{R}_A, D)$ .

*Preuve* — Donner une action de  $\varphi$  et  $\gamma$  sur  $D \oplus \mathcal{R}_A$  étendant la structure de  $(\varphi, \Gamma)$ -module de  $D$  est équivalent à donner  $x := (\varphi-1)(e) \in D$  et  $y := (\gamma-1)(e) \in D$ ,  $\varphi$  et  $\gamma$  commutant si et seulement si  $(x, y)$  est dans  $Z^1(C_{\varphi, \gamma}(D))$ . L'action de  $\gamma$  s'étend automatiquement en une action continue de  $\Gamma$ . En effet, il découle du Lemme 1.4 (i) que si  $f \in \mathcal{R}_{A, r}$  alors la suite  $(1 + \gamma + \dots + \gamma^{p^n-1})f$  tend vers 0. Cela vaut donc aussi si  $f \in M_d(\mathcal{R}_{A, r})$ , et donc tout 1-cocycle  $\gamma^\mathbb{Z} \rightarrow M_d(\mathcal{R}_{A, r})$  s'étend en un cocycle continu  $\Gamma \rightarrow M_d(\mathcal{R}_{A, r})$ . On vérifie immédiatement que deux 1-cocycles donnent des extensions isomorphes si et seulement si ils diffèrent d'un cobord.  $\square$

Il se trouve que toujours suivant Fontaine et Herr, un autre complexe est relié à la cohomologie de  $D$ . Supposons  $r = 0$  ou  $r > p^{-\frac{1}{p(p-1)}}$ . L'application  $(\mathcal{R}_{A, r^p})^p \rightarrow \mathcal{R}_{A, r}$  définie par

$$(f_0, \dots, f_{p-1}) \mapsto \sum_{i=0}^{p-1} (1+T)^i \varphi(f_i)$$

est alors un isomorphisme topologique. En effet, c'est un résultat standard quand  $A = \mathbb{Q}_p$  et le lemme 1.3 (i) nous y ramène en général. En particulier,  $\varphi$  est fini et plat de degré  $p$ , continu et injectif. On définit alors  $\psi : \mathcal{R}_{A, r} \rightarrow \mathcal{R}_{A, r}$  par la formule  $\varphi\psi = \frac{1}{p} \text{trace}_{\mathcal{R}_{A, r}/\varphi(\mathcal{R}_{A, r^p})}(\varphi)$ . Sur  $A \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_p(\mu_p)$  on a donc la formule  $\varphi\psi(f) = \frac{1}{p} \sum_{\zeta^{p-1}=1} f(\zeta(1+T) - 1)$ . Le calcul de la trace des  $(1+T)^i$  assure que si  $f = \sum_{i=0}^{p-1} (1+T)^i \varphi(f_i)$  alors  $\psi(f) = f_0$ . En particulier,  $\psi : \mathcal{R}_{A, r} \rightarrow \mathcal{R}_{A, r^p}$  est continu.

Soit  $D$  un  $(\varphi, \Gamma)$ -module sur  $\mathcal{R}_A$  ou  $\mathcal{R}_A^+$ . Comme  $D$  a par définition une  $\mathcal{R}_A$  ou  $\mathcal{R}_A^+$ -base dans  $\varphi(D)$ , on a encore une décomposition

$$D = \oplus_{i=0}^{p-1} (1+T)^i \varphi(D).$$

On peut donc définir un opérateur  $\psi : D \rightarrow D$  par la formule

$$\psi\left(\sum_{i=0}^{p-1} (1+T)^i \varphi(x_i)\right) = x_0.$$

Il est  $A$ -linéaire surjectif, commute à l'action de  $\Gamma$ , et satisfait  $\psi\varphi = \text{id}$ . Enfin, si  $u \in \text{Hom}_{\text{FG}_A}(D_1, D_2)$ , alors  $u \cdot \psi = \psi \cdot u$ . Le complexe  $C_{\psi, \gamma}(D)^\bullet$  est alors défini de la même manière que  $C_{\varphi, \gamma}(D)^\bullet$  à ceci près que  $\varphi$  est remplacé par  $\psi$ . Un calcul immédiat montre que l'on dispose d'un morphisme

$$\eta : C_{\varphi, \gamma}(D)^\bullet \rightarrow C_{\psi, \gamma}(D)^\bullet$$

<sup>14</sup>Un tel générateur n'existe bien sûr que pour  $p > 2$ . Quand  $p = 2$ , on choisit pour  $\gamma \in \Gamma$  un élément engendrant topologiquement  $\Gamma/\Gamma_{\text{tors}}$  où  $\Gamma_{\text{tors}} = \{\pm 1\}$ . On définit ensuite  $C(D)^\bullet$  de la même manière à ceci près que de  $D$  y est partout remplacé par ses invariants  $D^{\Gamma_{\text{tors}}}$  sous le groupe fini  $\Gamma_{\text{tors}}$ , ce qui n'altère aucun des arguments qui suivent.

qui vaut l'identité en degré 0,  $(x, y) \mapsto (-\psi(x), y)$  en degré 1, et  $-\psi$  en degré 2. Le morphisme  $\eta$  est surjectif car  $\psi$  l'est, son noyau étant le complexe

$$0 \longrightarrow 0 \longrightarrow D^{\psi=0} \xrightarrow{\gamma-1} D^{\psi=0} \longrightarrow 0.$$

En particulier,  $C_{\psi, \gamma}(D)^\bullet$  et  $C_{\varphi, \gamma}(D)^\bullet$  sont quasi-isomorphes si  $\gamma - 1$  est bijectif sur  $D^{\psi=0}$ . La proposition suivante est immédiate.

**Proposition 2.3.** *Soit  $D$  un  $(\varphi, \Gamma)$ -module sur  $\mathcal{R}_A$ . Si  $\gamma - 1$  est bijectif sur  $D^{\psi=0}$  alors on a des identifications naturelles  $H^0(D) = D^{\psi=1, \gamma=1}$ ,  $H^2(D) = D/(\psi - 1, \gamma - 1)$ , ainsi qu'une suite exacte naturelle*

$$0 \rightarrow D^{\psi=1}/(\gamma - 1) \xrightarrow{y \mapsto (0, y)} H^1(D) \xrightarrow{(x, y) \mapsto \bar{x}} (D/(\psi - 1))^{\gamma=1} \rightarrow 0.$$

Enfin, si on pose  $C(D) = (\varphi - 1)D^{\psi=1} \subset D^{\psi=0}$ , on a une suite exacte naturelle

$$0 \rightarrow D^{\varphi=1}/(\gamma - 1) \rightarrow D^{\psi=1}/(\gamma - 1) \rightarrow C(D)/(\gamma - 1) \rightarrow 0.$$

En théorie des  $(\varphi, \Gamma)$ -modules de Fontaine classique, un résultat de Herr [He1, Thm. 3.8] assure que  $\gamma - 1$  est toujours bijectif sur  $D^{\psi=0}$ . Dans le cadre ci-dessus, un résultat de Colmez assure aussi que c'est toujours le cas si  $A$  est un corps [Co2, Prop. 5.1.19]. Nous allons démontrer que c'est aussi le cas en général sous une hypothèse assez faible sur  $D$ .

**Théorème 2.4.** *Soit  $D$  un  $(\varphi, \Gamma)$ -module sur  $\mathcal{R}_A$  qui est  $\Gamma$ -borné. Alors  $\gamma - 1$  est bijectif sur  $D^{\psi=0}$ .*

Plus généralement, supposons que  $D$  est un  $(\varphi, \Gamma)$ -module sur  $\mathcal{R}_A$  possédant une suite croissante  $D_1 \subset D_2 \subset \dots \subset D_s$  de sous- $\mathcal{R}_A$ -modules qui sont facteurs directs comme  $\mathcal{R}_A$ -modules, et de plus stables par  $\varphi$  et  $\Gamma$ . Supposons enfin que les  $D_{i+1}/D_i$  sont  $\Gamma$ -bornés. Alors  $\gamma - 1$  est bijectif sur  $D^{\psi=0}$ .

*Preuve* — En effet, si  $0 \rightarrow D_1 \rightarrow D_2 \rightarrow D_3 \rightarrow 0$  alors la surjectivité de  $\psi$  (sur  $D_1$ ) entraîne que la suite associée

$$0 \rightarrow D_1^{\psi=0} \rightarrow D_2^{\psi=0} \rightarrow D_3^{\psi=0} \rightarrow 0$$

est exacte. Comme elle est  $\gamma$ -équivariante, il vient que si  $\gamma - 1$  est bijectif sur  $D_i^{\psi=0}$  pour  $i = 1, 3$  alors il l'est aussi pour  $i = 2$ , de sorte que le second cas suit du premier, que nous considérons maintenant.

Soient  $e_1, \dots, e_d$  une  $\mathcal{R}_A$ -base de  $D$ ,  $\mathcal{A} \subset A$  un modèle, et  $N \geq 0$ , tels que  $\mathcal{D} := \bigoplus_i \mathcal{E}_{\mathcal{A}}^{\dagger, N} e_i$  soit stable par  $\Gamma$ . Choisissons un entier  $M$  comme dans la proposition 1.7. Comme  $\gamma - 1$  divise  $\gamma^{(p-1)p^{M-1}} - 1$  dans  $\mathbb{Z}[\gamma]$ , il suffit de montrer que  $\gamma - 1$  est bijectif sur  $D^{\psi=0}$  si  $\gamma \in 1 + p^M \mathbb{Z}_p^*$ . Posons  $\gamma_0 = 1 + p^M \in \Gamma$ . La relation  $\gamma_0(1 + T) = (1 + T)\varphi^M(1 + T)$  entraîne pour tout  $x$  dans  $D$

$$(\gamma_0 - 1)((1 + T)\varphi^M(x)) = (1 + T)\varphi^M((1 + T)\gamma_0(x) - x) = (1 + T)\varphi^M(G_{\gamma_0}(x)).$$

Mais  $D$  est la réunion des  $\mathcal{D} \otimes_{\mathcal{E}_{\mathcal{A}}^{\dagger, n}} \mathcal{R}_{A, p^{-1/n}}$  pour  $n \geq N$ . La proposition 1.7 assure que le  $A[G_{\gamma_0}]$ -module  $\mathcal{D} \otimes_{\mathcal{E}_{\mathcal{A}}^{\dagger, n}} \mathcal{R}_{A, p^{-1/n}}$  s'étend en un  $\mathcal{R}_{A, p^{-1/n}}$ -module via  $G_{\gamma_0} \mapsto T$ . Comme  $T$  est inversible dans  $\mathcal{R}_{A, p^{-1/n}}$  si  $n > 0$  il vient que  $G_{\gamma_0}$  est inversible sur  $\mathcal{D} \otimes_{\mathcal{E}_{\mathcal{A}}^{\dagger, n}} \mathcal{R}_{A, p^{-1/n}}$ . Pour conclure, il reste à remarquer deux choses. Premièrement, si  $u \in \mathbb{Z}_p^*$  alors  $\gamma_0^u - 1$  agit sur  $\mathcal{D} \otimes_{\mathcal{E}_{\mathcal{A}}^{\dagger, n}} \mathcal{R}_{A, p^{-1/n}}$  via l'élément  $u(G_{\gamma_0}) \in \mathcal{R}_{A, p^{-1/n}}^*$ , qui est aussi inversible. Cela montre que si  $\gamma' \in 1 + p^M \mathbb{Z}_p^*$  alors  $\gamma' - 1$  est bijectif sur  $(1 + T)\varphi^M(D)$ . Deuxièmement, cela vaut encore si on remplace  $(1 + T)$  par  $(1 + T)^a$  pour  $a \in \mathbb{Z}_p^*$ . En effet, pour tout  $a \in \mathbb{Z}_p^*$  et  $\gamma' \in 1 + p^M \mathbb{Z}_p^*$  l'action de  $a$  sur  $D$  induit un isomorphisme  $\gamma'$ -équivariant

$$(1 + T)\varphi^M(D) \xrightarrow{\sim} (1 + T)^a \varphi^M(D).$$

On conclut car  $D^{\psi=0} = \bigoplus_{1 \leq i \leq (p-1)p^{M-1}, (p, i)=1} (1 + T)^i \varphi^M(D)$ .  $\square$

**Corollaire 2.5.** *Si  $D$  est triangulin sur  $\mathcal{R}_A$  alors  $\gamma - 1$  est bijectif sur  $D^{\psi=0}$ .*

*Preuve* — Il suffit de vérifier que  $\mathcal{R}_A(\delta)$  est  $\Gamma$ -borné si  $\delta \in \mathcal{T}(A)$ . Soit  $e$  une base de  $\mathcal{R}_A(\delta)$  telle que  $\gamma(e) = \delta(\gamma)e$  pour tout  $\gamma \in \Gamma$ . Comme  $\Gamma$  est compact et  $\delta$  est continu, les éléments  $\delta(\gamma)$  et  $\delta(\gamma)^{-1}$  de  $A$  sont à puissances positives bornées pour tout  $\gamma \in \Gamma$ . Comme  $\Gamma$  est topologiquement de type fini, on peut donc trouver un modèle  $\mathcal{A} \subset A$  tel que  $\delta(\Gamma) \subset \mathcal{A}^*$ . À fortiori,  $\Gamma.e \subset \mathcal{A}[[T]]e$ , ce qui conclut.  $\square$

**2.6. Cohomologie de  $\mathcal{R}_A(\delta)$  partie I : calcul de  $H^0$  et  $H^2$ .** Nous allons maintenant calculer les  $H^i(\mathcal{R}_A(\delta))$ . Rappelons que lorsque  $A$  est un corps, ce calcul est dû à Colmez pour  $i = 0, 1$  [Co1], et Liu pour  $i = 2$  [L]. Dans le cas général, nous allons procéder de manière légèrement différente à celle de Colmez en utilisant un dévissage de l'anneau de Robba (aussi dû à Colmez) que nous rappelons maintenant. Si  $f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n T^n \in \mathcal{R}_A$ , on note  $\text{Res}(f) \in A$  le résidu en 0 de la forme différentielle  $f(T) \frac{dT}{1+T}$ , c'est à dire l'élément  $a_{-1}$  dans l'écriture  $\frac{f(T)}{1+T} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n T^n$ .

**Définition 2.7.** *Si  $f \in \mathcal{R}_A$ , la transformée de Colmez de  $f$  est la fonction  $C(f) : \mathbb{Z}_p \rightarrow A$  définie par la formule*

$$C(f)(x) = \text{Res}(f(1+T)^x) \quad \forall x \in \mathbb{Z}_p.$$

Si  $h \geq 0$  est un entier, notons  $\text{LA}_h(\mathbb{Z}_p, A)$  le  $A$ -module des fonctions  $A$ -valuées et  $h$ -analytiques sur  $\mathbb{Z}_p$ , i.e. telles que pour tout  $x \in \mathbb{Z}_p$ , la fonction  $f_{x,h}(t) := f(x + p^h t)$  est dans  $A\langle t \rangle$ . C'est un espace de Banach pour la norme  $|f|_h = \sup_{x \in \mathbb{Z}_p} |f_{x,h}|$  où  $A\langle t \rangle$  est muni de la norme du sup. des coefficients. On a de plus  $|af|_h \leq |a||f|_h$  si  $a \in A$  et  $f \in \text{LA}_h(\mathbb{Z}_p, A)$ . On munit  $\text{LA}_h(\mathbb{Z}_p)$  d'actions de  $\psi$  et  $\Gamma$  par les formules ( $f \in \text{LA}_h(\mathbb{Z}_p, A)$ )

$$\forall \gamma \in \Gamma \quad \gamma(f)(x) = \gamma f(\gamma^{-1}x), \quad \psi(f)(x) = f(px).$$

On prendra garde que l'action de  $\Gamma$  définie ci-dessus n'est pas l'action naïve. De plus,  $\text{LA}(\mathbb{Z}_p, A) = \cup_{h \geq 0} \text{LA}_h(\mathbb{Z}_p, A)$  est muni d'une action de  $\varphi$  si l'on pose  $\varphi(f)(x) = 0$  si  $x \in \mathbb{Z}_p^*$ ,  $\varphi(f)(x) = f(x/p)$  si  $x \in p\mathbb{Z}_p$ .

**Proposition 2.8.**  *$C$  induit une suite exacte commutant aux actions de  $\varphi, \psi$  et  $\Gamma$  :*

$$0 \longrightarrow \mathcal{R}_A^+ \longrightarrow \mathcal{R}_A \xrightarrow{C} \text{LA}(\mathbb{Z}_p, A) \longrightarrow 0.$$

*Preuve* — Quand  $A$  est un corps, c'est le théorème I.1.3 de [Co2], l'argument est similaire en général. En effet, si  $x \in \mathbb{Z}_p$  on a par définition  $(1+T)^x = \sum_{n \geq 0} \binom{x}{n} T^n \in \mathbb{Z}_p[[T]]$ . L'application  $f \mapsto \text{Res}(f)$  étant clairement continue sur chaque  $\mathcal{E}_A^I$ , on a la formule

$$C(f)(x+1) = \sum_{n \geq 0} a_{-1-n} \binom{x}{n} \in A$$

où  $f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n T^n$ . Appliquant ceci à  $x = 0, 1, 2, \dots$ , il vient que  $\text{Ker } C(f) = \mathcal{R}_A^+$ . De plus, on obtient que  $\text{Im } C(f)$  est exactement l'ensemble des fonctions continues  $\mathbb{Z}_p \rightarrow A$  de la forme  $\sum_{n \geq 0} c_n \binom{x}{n}$  telles qu'il existe  $r > 1$  tel que  $|c_n| r^n \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$ . D'autre part, un théorème d'Amice assure que  $\text{LA}_h(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Q}_p)$  pour  $h \geq 0$  est un espace de Banach sur  $\mathbb{Q}_p$  ayant pour base orthonormée  $[\frac{n}{p^h}]! \binom{x}{n}$ . Via l'isométrie naturelle  $A\langle t \rangle = \mathbb{Q}_p\langle t \rangle \hat{\otimes}_{\mathbb{Q}_p} A$ , on dispose d'un isomorphisme naturel  $\text{LA}_h(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Q}_p) \hat{\otimes}_{\mathbb{Q}_p} A \xrightarrow{\sim} \text{LA}_h(\mathbb{Z}_p, A)$ , de sorte que  $[\frac{n}{p^h}]! \binom{x}{n}$  est aussi une base orthonormée du  $A$ -module de Banach  $\text{LA}_h(\mathbb{Z}_p, A)$ . Pour conclure la surjectivité de  $C$ , il suffit donc de voir que pour une suite  $(c_n) \in A^{\mathbb{N}}$ , il y a équivalence entre satisfaire  $|c_n| r^n \rightarrow 0$  pour un certain  $r > 1$  et satisfaire  $\frac{|c_n|}{[\frac{n}{p^h}]!} \rightarrow 0$  pour un entier  $h$

assez grand. Mais  $v_p([\frac{n}{p^h}]!) = \frac{n}{p^h(p-1)} + O(\log(n))$  et  $v_p([\frac{n}{p^h}]!) \geq \frac{n}{p^h(p-1)}$ , donc si on pose  $r_h = p^{-\frac{1}{p^h(p-1)}}$ , alors pour  $h \geq 0$  fixé et tout  $n$  assez grand on a  $r_h^n \leq |[\frac{n}{p^h}]!| \leq r_{h+1}^n$ .

Il ne reste qu'à voir que  $C$  est équivariant pour  $\varphi, \psi$  et  $\Gamma$ . Remarquons pour cela que les estimées ci-dessus montrent que pour tout entier  $h \geq 0$  on a  $C(\mathcal{R}_{A,r_h}) \subset \text{LA}_h(\mathbb{Z}_p, A)$  et

$$C|_{\mathcal{R}_{A,r_h}} : \mathcal{R}_{A,r_h} \rightarrow \text{LA}_h(\mathbb{Z}_p, A)$$

est continue. La commutation à  $\varphi, \psi$  et  $\Gamma$  se vérifie alors sur la partie dense  $A \cdot \mathcal{R}_{\mathbb{Q}_p, r_h}$ , soit encore dans le cas  $A = \mathbb{Q}_p$ , où elle est démontrée dans [Co2, Prop. I.2.2].  $\square$

Notons  $x \in \text{LA}_0(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_p)$  la fonction identité. Si  $N \geq 0$ , notons  $\text{Pol}_{\leq N}(\mathbb{Z}_p, A) \subset \text{LA}_0(\mathbb{Z}_p, A)$  le sous- $A$ -module (libre de rang  $N+1$ ) des fonctions polynomiales de degré  $\leq N$ , et  $\text{Pol}(\mathbb{Z}_p, A) = A[x] = \cup_N \text{Pol}_{\leq N}(\mathbb{Z}_p, A)$ . On a pour tout entier  $h \geq 0$  (et pour  $h = \emptyset$ )

$$\text{Pol}_{\leq N}(\mathbb{Z}_p, A) \oplus x^{N+1} \text{LA}_h(\mathbb{Z}_p, A) = \text{LA}_h(\mathbb{Z}_p, A),$$

les deux sous-espaces étant stables par  $\psi$  et  $\Gamma$ . La  $A$ -base des monômes  $x^i$  de  $\text{Pol}_{\leq N}(\mathbb{Z}_p, A)$  est propre pour  $\psi$  et  $\Gamma$  : pour  $i \leq N$  on a  $\psi(x^i) = p^i x^i$  et  $\gamma(x^i) = \gamma^{1-i} x^i$  pour tout  $\Gamma$ .

On pose enfin  $t = \log(1+T) = \sum_{k \geq 1} (-1)^{k+1} \frac{T^k}{k} \in \mathcal{R}^+$ . On a  $\varphi(t) = pt$ , donc  $\psi(t) = p^{-1}t$ , et  $\gamma(t) = \gamma t$  pour tout  $\gamma \in \Gamma$ .

**Lemme 2.9.** *Soient  $\lambda \in A^*$  et  $N \geq 0$  un entier.*

- (i) *On a une décomposition  $\varphi$ -stable  $\mathcal{R}_A^+ = (\bigoplus_{0 \leq i < N} At^i) \oplus T^N \mathcal{R}_A^+$ .*
- (ii)  *$1 - \lambda\varphi$  est injectif sur  $\text{LA}(\mathbb{Z}_p, A)$ ,  $\mathcal{R}_A^{\lambda\varphi=1} = (\mathcal{R}_A^+)^{\lambda\varphi=1}$ , et si  $|\lambda p^N| < 1$  alors  $1 - \lambda\varphi$  est bijectif sur  $T^N \mathcal{R}_A^+$ , d'inverse continu.*
- (iii) *Si  $|p^{N+1}\lambda| < 1$ , alors  $1 - \lambda\psi$  est bijectif sur  $x^{N+1} \text{LA}_h(\mathbb{Z}_p, A)$  pour tout  $h \geq 0$ .*
- (iv)  *$\bigoplus_{i=0}^N A \cdot T^{-(i+1)} \subset \mathcal{R}_A$  est un sous- $A$ -module  $\psi$ -stable sur lequel  $C$  induit un isomorphisme avec  $\text{Pol}_{\leq N}(A, \mathbb{Z}_p)$ .*
- (v)  *$(1 - \lambda\psi)\mathcal{R}_A^+ = \mathcal{R}_A^+$  et la transformée de Colmez induit une suite exacte*

$$0 \longrightarrow (\mathcal{R}_A^+)^{\lambda\psi=1} \longrightarrow \mathcal{R}_A^{\lambda\psi=1} \xrightarrow{C} \text{LA}(\mathbb{Z}_p, A)^{\lambda\psi=1} \longrightarrow 0$$

*ainsi qu'un isomorphisme*

$$C : \mathcal{R}_A/(\lambda\psi - 1) \xrightarrow{\sim} \text{LA}(\mathbb{Z}_p, A)/(\lambda\psi - 1).$$

- (vi) *Si  $|\lambda p^N| < 1$  alors  $1 - \lambda\varphi$  induit une bijection  $\Gamma$ -équivariante*

$$(T^N \mathcal{R}_A^+)^{\lambda^{-1}\psi=1} \xrightarrow{\sim} (\mathcal{R}_A^+)^{\psi=0} \cap T^N \mathcal{R}_A^+.$$

*Preuve* — Le (i) découle de ce que  $t \in T + T^2 \mathcal{R}_A^+$  et  $\varphi(T) \in T \mathcal{R}_A^+$ . Vérifions le premier point du (ii). Tout d'abord, l'injectivité de  $1 - \lambda\varphi$  sur  $\text{LA}(\mathbb{Z}_p, A)$  entraîne que  $\mathcal{R}_A^{\lambda\varphi=1} = (\mathcal{R}_A^+)^{\lambda\varphi=1}$  via la suite exacte de la proposition 2.8. Soit donc  $f \in \text{LA}(\mathbb{Z}_p, A)$  telle que  $\lambda\varphi(f) = f$ . Il vient que  $\lambda^n \varphi^n(f) = f$  pour tout  $n \geq 1$ . En particulier,  $f$  est nulle sur  $p^{n-1} \mathbb{Z}_p^*$  pour tout  $n \geq 1$  :  $f = 0$ , ce que l'on voulait démontrer. Le second point du (ii) est l'argument de Colmez [Co1, Lemme A.1], que l'on rappelle par commodité pour le lecteur. D'une part, pour tout  $0 < r < 1$  et tout  $f \in \mathcal{R}_A^+$ ,  $|\varphi(f)|_{[0,r]} \leq |f|_{[0,r]}$  (se ramener à  $A = \mathbb{Q}_p$  auquel cas cela découle de l'interprétation de  $|\cdot|_r$  comme norme sup. sur  $B_{[0,r]}$ ). D'autre part, pour tout  $0 < r < 1$  il existe  $C_r > 0$  tel que pour tout



$i \geq 0$ ,  $|\varphi^i(T^N)|_{[0,r]} \leq \frac{C_r}{p^{Ni}}$  (idem). Ainsi, si  $|\lambda p^N| < 1$ , alors pour tout  $f \in T^N \mathcal{R}_A^+$ , on a  $|\lambda^k \varphi^k(f)|_{[0,r]} \leq C_r |f|_{[0,r]} |\lambda p^N|^k$  et

$$|\sum_{k \geq 0} \lambda^k \varphi^k(f)|_{[0,r]} \leq \frac{C_r |f|_{[0,r]}}{1 - |\lambda p^N|}.$$

On a donc construit un inverse continu de  $1 - \lambda \varphi$  sur  $T^N \mathcal{R}_A^+$ .

Montrons le (iii). Remarquons que si  $f \in \text{LA}_h(\mathbb{Z}_p, A)$  et  $h \geq 1$  alors  $\psi(f) \in \text{LA}_{h-1}(\mathbb{Z}_p, A)$ . Ainsi,  $\psi(x^i \text{LA}_h(\mathbb{Z}_p, A)) \subset x^i \text{LA}_{h-1}(\mathbb{Z}_p, A)$  pour tout  $i \geq 0$ . Enfin, si  $f \in x^{N+1} \text{LA}_0(\mathbb{Z}_p, A)$  alors  $|\psi(f)|_0 \leq \frac{|f|_0}{p^{N+1}}$ . Ainsi, pour tout  $m \geq h$  on a

$$|\psi^m(f)|_0 \leq \frac{1}{p^{(N+1)(m-h)}} |\psi^h(f)|_0.$$

Sous l'hypothèse sur  $N$ , la série  $\sum_{m \geq 0} \lambda^m \psi^m$  converge donc dans les endomorphismes de  $x^{N+1} \text{LA}_h(\mathbb{Z}_p, A)$ , vers un inverse continu de  $\text{id} - \lambda \psi$ .

Pour le (iv), un calcul sans difficulté montre que  $\psi(T^{-i-1}) = Q(T)T^{-i-1}$  où  $Q(T) \in \mathbb{Q}[T]$  est un polynôme de degré  $< i+1$  (et tel que  $Q(0) = p^{-i}$ ). On conclut car  $C(T^{-i-1})(x+1) = \binom{x}{i}$ .

Montrons maintenant le (v). Si  $N$  est suffisamment grand de sorte que  $|\lambda^{-1} p^N| < 1$ , on a vu au (ii) que  $\sum_{k \geq 0} \lambda^{-k} \varphi^k$  converge normalement sur  $T^N \mathcal{R}_A^+$  vers un inverse de  $1 - \lambda^{-1} \varphi$ . L'opérateur  $\psi$  étant continu sur  $\mathcal{R}_A^+$ , la relation formelle  $(1 - \lambda \psi)(\sum_{k \geq 0} \lambda^{-k} \varphi^k) = -\lambda \psi$  a donc un sens sur  $T^N \mathcal{R}_A^+$ , puis

$$(1 - \lambda \psi)T^N \mathcal{R}_A^+ = \psi(T^N \mathcal{R}_A^+) \supset \psi(\varphi(T^N) \mathcal{R}_A^+) = T^N \psi(\mathcal{R}_A^+) = T^N \mathcal{R}_A^+.$$

Enfin on a  $\psi(T) = -1$ , donc si  $i \geq 0$  on a l'identité

$$(\lambda \psi - 1)(T \varphi(T^i)) = -\lambda T^i - T \varphi(T)^i.$$

Comme  $T \varphi(T)^i \in p^i T^{i+1} + T^{i+2} \mathcal{R}_A^+$  une récurrence descendante montre que  $T^i \in (\lambda \psi - 1) \mathcal{R}_A^+$  pour tout  $i \leq N$ . Le (v) suit en appliquant  $\lambda \psi = 1$  à la suite exacte de la transformée de Colmez, et d'après le (i).

La dernière assertion découle de (i) et (ii), et de ce que si  $(1 - \lambda \varphi)x = y$  alors  $\lambda(\lambda^{-1} \psi - 1)x = \psi(y)$ , donc  $\psi(y) = 0$  si et seulement si  $(1 - \lambda^{-1} \psi)x = 0$ .  $\square$

Une conséquence de (i), (ii), (iii) et (v) du lemme ci-dessus est la proposition suivante, qui donne une description complète de  $H^i(\mathcal{R}_A(\delta))$  pour  $i = 0$  et  $i = 2$ .

**Proposition 2.10.** *Soit  $\delta \in \mathcal{T}(A)$ . On a*

$$\mathcal{R}_A(\delta)^{\varphi=1} = \mathcal{R}_A^{\delta(p)\varphi=1} = A[t]^{\delta(p)\varphi=1}$$

*En particulier,  $H^0(\mathcal{R}_A(\delta)) = A[t]^{\delta(p)\varphi=1, \delta(\gamma)\gamma=1}$ . De plus, la transformée de Colmez induit un isomorphisme  $\Gamma$ -équivariant*

$$\mathcal{R}_A(\delta)/(\psi - 1) = \mathcal{R}_A/(\delta(p)^{-1} \psi - 1) \xrightarrow{\sim} \text{Pol}(\mathbb{Z}_p, A)/(\delta(p)^{-1} \psi - 1).$$

*En particulier,  $H^2(\mathcal{R}_A(\delta)) = \text{Pol}(\mathbb{Z}_p, A)/(\delta(p)^{-1} \psi - 1, \delta(\gamma)\gamma - 1)$ .*

Suivant Colmez, désignons par  $x : \mathbb{Q}_p^* \rightarrow \mathbb{Q}_p^*$  le caractère identité et par  $\chi : \mathbb{Q}_p^* \rightarrow \mathbb{Z}_p^*$  le caractère cyclotomique, c'est à dire  $\chi = x|x|$ . Un corollaire immédiat de la proposition ci-dessus est le suivant.

**Corollaire 2.11.** *Soit  $\delta \in \mathcal{T}(A)$ .*

- (i)  $H^0(\mathcal{R}_A(\delta)) \neq 0$  si et seulement si il existe  $i \geq 0$  et  $f \neq 0 \in A$  tels que  $f \cdot (\delta - x^{-i})$  est identiquement nul sur  $\mathbb{Q}_p^*$ .
- (ii)  $H^2(\mathcal{R}_A(\delta)) \neq 0$  si et seulement si il existe  $i \geq 0$  tel que le fermé de  $\mathrm{Sp}(A)$  sur lequel  $\delta = \chi(x)x^i$  soit non vide.

Il reste à décrire  $H^1(\mathcal{R}_A(\delta))$ . D'après le dévissage de la cohomologie démontré plus haut il nous faut nous intéresser au  $A[\Gamma]$ -module  $\mathcal{R}_A(\delta)^{\psi=1}$ . Une étape clef sera alors la structure du  $A[\Gamma]$ -module  $\mathcal{R}_A^+(\delta)^{\psi=0}$ .

**2.12. Structures sur  $\mathcal{R}_A^+(\Gamma)$ .** Soit  $C$  un groupe profini isomorphe à  $\mathbb{Z}_p$  et  $c$  un générateur topologique de  $C$ . Si  $\mathcal{A}$  est complet séparé pour la topologie  $p$ -adique, et en particulier si c'est un modèle d'une algèbre affinoïde  $A$ , il est connu depuis Iwasawa que l'application

$$\mathcal{A}[[T]] \rightarrow \mathcal{A}[[C]] := \varprojlim_n \mathcal{A}[C/p^n C]$$

envoyant  $T$  sur  $[c] - 1$  est un isomorphisme. Cela permet de définir un anneau  $\mathcal{R}_A^+(C)$  en remplaçant simplement la variable  $T$  dans la définition de  $\mathcal{R}_A^+$  par  $[c] - 1$ . Cette définition ne dépend pas du choix de  $c$  car  $\Gamma$  agit par automorphismes sur  $\mathcal{R}_A^+$ . On remarque de plus que  $\mathcal{R}_A^+(pC) = \varphi(\mathcal{R}_A(C))$ , et donc que  $\mathcal{R}_A^+(pC) \otimes_{A[pC]} A[C] = \mathcal{R}_A^+(C)$ , car les  $(1+T)^i$  pour  $0 \leq i \leq p-1$  forment une base  $\mathcal{R}_A^+$  sur  $\varphi(\mathcal{R}_A)^+$ . On pose enfin

$$\mathcal{R}_A^+(\Gamma) := \mathcal{R}_A^+(1+p^M \mathbb{Z}_p) \otimes_{A[1+p^M \mathbb{Z}_p]} A[\mathbb{Z}_p^*]$$

qui ne dépend pas du choix de  $M \geq 1$  par ce que l'on vient de dire. On dispose d'inclusions naturelles denses

$$A[\Gamma] \subset (\mathcal{A}[[\Gamma]])[1/p] \rightarrow \mathcal{R}_A^+(\Gamma).$$

On posera aussi  $A[[\Gamma]]_b = (\mathcal{A}[[\Gamma]])[1/p] \subset \mathcal{R}_A^+(\Gamma)$ . Il ne dépend pas du choix de  $\mathcal{A}$ . Quand  $A$  est un corps le résultat suivant est essentiellement dû à Berger ([Be1, §5]).

**Proposition 2.13.** *Soit  $D$  un  $(\varphi, \Gamma)$ -module sur  $\mathcal{R}_A$  ou  $\mathcal{R}_A^+$ . L'action  $A$ -linéaire de  $\Gamma$  sur  $D$  s'étend de manière unique en une structure de  $\mathcal{R}_A^+(\Gamma)$ -module sur  $D$  qui est continue au sens suivant : si  $(e_i)$  est une  $\mathcal{R}_A$ -base de  $D$  telle que  $\Gamma(D_r) \subset D_r$  où  $D_r = \bigoplus_i \mathcal{R}_{A,r} e_i$ , alors pour tout  $f \in D_r$  l'application orbite  $\mathcal{R}_A^+(\Gamma) \rightarrow D_r = \mathcal{R}_{A,r}^d$ ,  $u \mapsto u(f)$ , est continue. Cette action de  $\mathcal{R}_A^+(\Gamma)$  commute à  $\varphi$  et  $\psi$ .*

*Preuve* — En effet, il suffit de voir que si  $I$  est un intervalle fermé de  $[0, 1[$  et si  $D = (\mathcal{E}_A^I)^n$  est muni d'une action semi-linéaire de  $\Gamma$  qui soit continue dans le sens que la matrice  $M_\gamma \in M_n(\mathcal{E}_A^I)$  de  $\gamma \in \Gamma$  dans la base canonique  $(e_i)$  dépende continûment de  $\gamma$ , alors l'application naturelle

$$A[\Gamma] \rightarrow \mathrm{End}_A(D)$$

se prolonge en une application continue  $\mathcal{R}_A^+(\Gamma) \rightarrow \mathrm{End}_A(D)$  (un tel prolongement étant nécessairement unique s'il existe). Fixons un tel  $I$  ainsi qu'un modèle  $\mathcal{A} \subset A$ . Le sous-espace  $\mathcal{D} = (\mathcal{O}_A^I)^n \subset D$  est un ouvert (pour la topologie de module de Banach sur  $\mathcal{E}_A^I$  de ce dernier), ainsi que  $p\mathcal{D}$ , de sorte qu'il existe un entier  $M \geq 1$  tel que pour tout  $\gamma \in 1+p^M \mathbb{Z}_p$  et tout entier  $i$  on ait  $(M_\gamma - 1)(e_i) \in pM_n(\mathcal{O}_A^I)$ . Le lemme 1.4 (i) permet de supposer de plus que  $(\gamma - 1)\mathcal{E}_A^I \subset p\mathcal{E}_A^I$  pour tout  $\gamma \in 1+p^M \mathbb{Z}_p$ . La relation

$$(\gamma - 1)\left(\sum_i a_i e_i\right) = \sum_i (\gamma - 1)(a_i) \gamma(e_i) + a_i (\gamma - 1)(e_i)$$

assurent alors que  $(\gamma - 1)\mathcal{D} \subset p\mathcal{D}$  pour tout  $\gamma \in 1+p^M \mathbb{Z}_p$ . On en déduit que le morphisme  $A[1+p^M \mathbb{Z}_p] \rightarrow \mathrm{End}_A(D)$  s'étend continûment en un morphisme

$$\mathcal{R}_A^+(1+p^M \mathbb{Z}_p) \rightarrow \mathrm{End}_A(D)$$

ainsi donc qu'à  $\mathcal{R}_A^+(\Gamma) = \mathcal{R}_A^+(1+p^M\mathbb{Z}_p) \otimes_{A[1+p^M\mathbb{Z}_p]} A[\mathbb{Z}_p^\times]$ . Remarquons que jusqu'ici nous n'avons pas utilisé la structure de  $\varphi$ -module sur  $D$ . La commutation de  $\mathcal{R}_A^+(\Gamma)$  à  $\varphi$  et  $\psi$  vient de leur commutation à  $\Gamma$  et de ce que pour tout  $r$  assez grand,  $\varphi : D_{r^p} \rightarrow D_r$  et  $\psi : D_r \rightarrow D_r$  sont continues (ceci découlant du cas  $D = \mathcal{R}_A$  considéré au § 2.1).  $\square$

Un point crucial est que la structure de  $D^{\psi=0}$  comme  $\mathcal{R}_A^+(\Gamma)$ -module est particulièrement simple.

**Proposition 2.14.** *Si  $D$  est un  $(\varphi, \Gamma)$ -module sur  $\mathcal{R}_A^+$  de rang  $d$  qui est  $\Gamma$ -borné alors  $D^{\psi=0}$  est libre de rang  $d$  sur  $\mathcal{R}_A^+(\Gamma)$ .*

*Plus précisément, si  $(e_i)$  est une  $\mathcal{R}_A^+$ -base de  $D$  telle que  $\oplus \mathcal{A}[[T]]e_i$  est stable par  $\Gamma$  pour un certain modèle  $\mathcal{A} \subset A$ , alors  $(1+T)\varphi(e_i)$  est une base de  $D^{\psi=0}$  sur  $\mathcal{R}_A^+(\Gamma)$ .*

Avant de démontrer ce résultat nous devons dire un mot sur la topologie considérée sur  $D^{\psi=0}$ . Tout d'abord, le choix d'une base  $(e_i)$  fournit une écriture  $D = \oplus_i \mathcal{R}_A^+ e_i$  et donc une structure d'espace de Fréchet sur  $D$ . Cette structure ne dépend pas du choix de la base et l'application structurale  $\mathcal{R}_A^+ \times D \rightarrow D$  est continue. Dans la base  $\varphi(e_i)$ , on a  $\psi(\sum_i x_i \varphi(e_i)) = \sum_i \psi(x_i) e_i$  donc la continuité de  $\psi$  sur  $\mathcal{R}_A^+$  entraîne sa continuité sur  $D$ ; celle de  $\varphi$  est immédiate. En particulier,  $D^{\psi=0}$  est fermé, ainsi que  $(1+T)\varphi^M(D)$  pour tout  $M \geq 1$ , et l'application  $x \mapsto (1+T)\varphi^M(x)$  est un homéomorphisme de  $D$  sur  $(1+T)\varphi^M(D)$  d'inverse  $y \mapsto \psi^M(\frac{y}{1+T})$ .

*Preuve* — Soit  $(e_i)$  comme dans l'énoncé,  $\mathcal{D} = \oplus_i \mathcal{A}[[T]]e_i$  et  $M$  associé à  $\mathcal{D}$  comme dans la proposition 1.7. Soit  $\gamma_0 = 1+p^M \in \Gamma$  et  $x \in D$ . Comme on l'a déjà vu, on a la relation

$$(\gamma_0 - 1)((1+T)\varphi^M(x)) = (1+T)\varphi^M(G_\gamma(x)).$$

La proposition 1.7 assure donc que l'action de  $1+p^M\mathbb{Z}_p$  sur  $(1+T)\varphi^M(D)$  s'étend en une structure de  $\mathcal{R}_A^+(1+p^M\mathbb{Z}_p)$ -module, qui est de plus libre de base  $(1+T)\varphi^M(e_i)$  d'après la proposition 1.7, et telle que  $\mathcal{R}_A^+(1+p^M\mathbb{Z}_p) \times (1+T)\varphi^M(D) \rightarrow (1+T)\varphi^M(D)$  soit continue. Cette structure est nécessairement celle de la proposition précédente par unicité de cette dernière. Les identités

$$D^{\psi=0} = \bigoplus_{1 \leq i \leq p^{M-1}(p-1), (p,i)=1} (1+T)^i \varphi^M(D),$$

$\mathcal{R}_A^+(\Gamma) = \mathcal{R}_A^+(1+p^M\mathbb{Z}_p) \otimes_{A[1+p^M\mathbb{Z}_p]} A[\Gamma]$ , et pour  $a \in \mathbb{Z}_p^*$ ,  $a((1+T)\varphi^M(D)) = (1+T)^a \varphi^M(D)$ , concluent la démonstration. Le dernier point vient de ce que

$$\mathcal{R}_A^+(\Gamma)/(\gamma - 1) = \mathcal{R}_A^+(1+p\mathbb{Z}_p)/(\gamma^{p-1} - 1) = \mathcal{R}_A^+/(T) = A.$$

$\square$

**Remarque 2.15.** Dans le même genre, on déduirait aisément de la proposition 1.7 que si  $D$  est un  $(\varphi, \Gamma)$ -module sur  $\mathcal{R}_A$  qui est  $\Gamma$ -borné alors l'action de  $\Gamma$  sur  $D^{\psi=0}$  s'étend en une structure de  $\mathcal{R}_A(\Gamma)$ -module (voir [Co2, V §3] pour la définition), qui est libre sur  $\mathcal{R}_A(\Gamma)$  de rang le rang de  $D$  sur  $\mathcal{R}_A$ .

**2.16. Cohomologie de  $\mathcal{R}_A(\delta)$ , partie II : structure de  $\mathcal{R}_A(\delta)^{\psi=1}$ .** Retournons au calcul de  $H^1(\mathcal{R}_A(\delta))$ . Étant donné le dévissage donné par la proposition 2.3, il convient d'étudier tout d'abord  $\mathcal{R}_A(\delta)^{\psi=1}$ . Si  $X$  est un  $(\varphi, \Gamma)$ -module sur  $\mathcal{R}_A$  ou  $\mathcal{R}_A^+$ , on pose suivant Fontaine  $C(X) = X^{\psi=0} \cap (1-\varphi)X = (1-\varphi)X^{\psi=1}$ , de sorte que l'on dispose d'une suite  $\mathcal{R}_A^+(\Gamma)$ -équivariante tautologique

$$0 \longrightarrow X^{\varphi=1} \longrightarrow X^{\psi=1} \xrightarrow{1-\varphi} C(X) \longrightarrow 0.$$

**Lemme 2.17.** Soient  $\delta \in \mathcal{T}(A)$ ,  $D = \mathcal{R}_A(\delta)$  et  $D^+ = \mathcal{R}_A^+(\delta)$ . On a des suites exactes naturelles  $\mathcal{R}_A^+(\Gamma)$ -équivariantes :

- (i)  $0 \longrightarrow (D^+)^{\psi=1} \longrightarrow D^{\psi=1} \xrightarrow{C} \text{Pol}(\mathbb{Z}_p, A)^{\delta(p)^{-1}\psi=1} \longrightarrow 0$ ,
- (ii)  $0 \longrightarrow C(D^+) \longrightarrow C(D) \xrightarrow{(1-\delta(p)\varphi)^{-1}C} \text{Pol}(\mathbb{Z}_p, A)^{\delta(p)^{-1}\psi=1} \longrightarrow 0$ .

De plus,  $(A[t])^{\delta(p)\varphi=1} = (D^+)^{\varphi=1} = D^{\varphi=1}$  et  $D/(\psi - 1) = \text{Pol}(\mathbb{Z}_p, A)/(\delta(p)^{-1}\psi - 1)$ .

*Preuve* — Pour le (i) on applique  $\delta^{-1}(p)\psi = 1$  à la suite exacte définie par la transformée de Colmez et on note que  $(D^+)/(\psi - 1) = 0$  et  $\text{LA}(\mathbb{Z}_p, A)^{\delta(p)^{-1}\psi=1} = \text{Pol}(\mathbb{Z}_p, A)^{\delta(p)^{-1}\psi=1}$  d'après le Lemme 2.9 (iv) et (iii). Le (ii) découle du (i) et de l'injectivité  $1 - \delta(p)\varphi$  sur  $\text{LA}(\mathbb{Z}_p, A)$  (lemme 2.9 (ii)). En effet, cette injectivité entraîne d'une part que  $C(D^+) = C(D) \cap D^+$ , puis que la dernière flèche de l'énoncé est bien définie ; elle est surjective par le (i). La dernière assertion a déjà été démontrée (corollaire 2.10).  $\square$

La structure de  $C(D)^+$  s'avère intéressante, avant de la décrire nous avons besoin d'un lemme sur  $\mathcal{R}_A^+(\Gamma)$ .

- Lemme 2.18.** (i) Si  $\delta : \mathbb{Z}_p^* \rightarrow A^*$  est un caractère continu, il s'étend de manière unique en un morphisme de  $A$ -algèbres continu  $\tilde{\delta} : \mathcal{R}_A^+(\Gamma) \rightarrow A$ . Tout morphisme de  $A$ -algèbres continu  $\mathcal{R}_A^+(\Gamma) \rightarrow A$  est de cette forme.
- (ii) Soit  $\gamma_0 \in \Gamma$  un générateur topologique de  $\Gamma$  (resp. de  $1 + 4\mathbb{Z}_2$  si  $p = 2$ ), soit  $T_\delta := [\gamma_0] - \delta(\gamma_0) \in \mathcal{R}_A^+(\Gamma)$ . On a  $\text{Ker}(\tilde{\delta}) = (T_\delta)$  où  $(T_\delta, [-1] - \delta(-1))$  selon que  $p > 2$  ou non.
- (iii) La multiplication par  $T_\delta$  est injective sur  $\mathcal{R}_A^+(\Gamma)$  et  $\mathcal{R}_A^+(\Gamma) = T_\delta \mathcal{R}_A^+(\Gamma) \oplus A$  (resp.  $\mathcal{R}_A^+(\Gamma) = T_\delta \mathcal{R}_A^+(\Gamma) \oplus A[\{\pm 1\}]$  si  $p = 2$ ).

*Preuve* — Soit  $\mathcal{A}$  un modèle de  $A$  contenant  $\delta(\Gamma)$ . Pour  $M \geq 1$  assez grand, on a  $\delta(1 + p^M \mathbb{Z}_p) \subset 1 + p\mathcal{A}$ . Rappelons que  $\mathcal{R}_A^+(1 + p^M \mathbb{Z}_p)$  s'identifie à  $\mathcal{R}_A^+$  si l'on envoie  $[c] - 1$  vers  $T$ ,  $c$  étant un générateur quelconque de  $1 + p^M \mathbb{Z}_p$ . Il est alors immédiat que  $\delta : A[1 + p^M \mathbb{Z}_p] \rightarrow A$  s'étend à  $\mathcal{R}_A^+(1 + p^M \mathbb{Z}_p)$ , ainsi donc qu'à  $\mathcal{R}_A^+(\Gamma)$  par extension des scalaires. La réciproque découle aisément de ce que l'application naturelle  $\mathbb{Z}_p[[\Gamma]] \rightarrow \mathcal{R}_A^+(\Gamma)$  est continue (lemme 1.3 (ii)) : cela démontre le (i).

Pour le (ii), il est clair que  $T_\delta$  et  $[-1] - \delta(-1)$  sont dans  $\text{Ker}(\tilde{\delta})$ , et que  $[\gamma_0^n] - \delta(\gamma_0)^n \in (T_\delta)$  pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ . Soit  $n \in \mathbb{Z}$  tel que  $c = \gamma_0^n$  engendre topologiquement  $1 + 2p\mathbb{Z}_p$ .  $\mathcal{R}_A^+(1 + 2p\mathbb{Z}_p)$  s'identifie à l'anneau de Robba  $A$ -valué positif sur la variable  $U = [c] - 1$ , et il vient que  $(T_\delta) \supset (U - (\delta(c) - 1))\mathcal{R}_A^+(1 + 2p\mathbb{Z}_p)$ . Comme  $(\delta(c) - 1)^m$  tend vers 0 quand  $m$  tend vers l'infini, on a  $\mathcal{R}_A^+(1 + 2p\mathbb{Z}_p) = A \oplus ([c] - 1 - (\delta(c) - 1))\mathcal{R}_A^+(1 + 2p\mathbb{Z}_p)$ . Le (ii) suit car l'application canonique  $A[\Gamma_{\text{tors}}] \rightarrow \mathcal{R}_A^+(\Gamma)/\mathcal{R}_A^+(1 + 2p\mathbb{Z}_p) = A[\Gamma/(1 + 2p\mathbb{Z}_p)]$  est un isomorphisme.

Le premier point du (iii) suit de l'analyse ci-dessus. En effet,  $\mathcal{R}_A^+(\Gamma)$  est libre de rang fini sur  $\mathcal{R}_A^+(1 + 2p\mathbb{Z}_p)$  et la multiplication par  $U - (\delta(c) - 1) \in (T_\delta)$  est injective sur l'anneau de Robba positif en  $U$ . Le second point découle du (ii).  $\square$

Considérons pour tout  $k \geq 0$  l'application

$$J_k : \mathcal{R}_A^+ \rightarrow \mathcal{R}_A^+/T^k \mathcal{R}_A^+ = A[T]/T^k.$$

Notons que  $T^k \mathcal{R}_A^+$  est fermé dans  $\mathcal{R}_A^+$  et qu'il est stable par  $\Gamma$  (et donc  $\mathcal{R}_A^+(\Gamma)$ ) et  $\varphi$ . Ainsi,  $J_k$  est équivariante sous  $\mathcal{R}_A^+(\Gamma)$  et  $\varphi$ . De plus, les images de  $1, t, \dots, t^{k-1}$  forment une  $A$ -base de  $\mathcal{R}_A^+/T^k \mathcal{R}_A^+$  propre pour  $\varphi$  et  $\Gamma$  de valeurs propres évidentes.

**Lemme 2.19.**  $J_k$  induit une surjection  $(\mathcal{R}_A^+)^{\psi=0} \rightarrow \mathcal{R}_A^+/T^k\mathcal{R}_A^+$ .

*Preuve* — En effet, l'écriture formelle " $1+T = \exp(t)$ " assure que  $J_k(1+T) = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{t^i}{i!}$ , l'important pour ce qui suit étant que le coefficient de chaque  $t^i$  est non nul. Comme pour  $i = 0, \dots, k-1$  les caractères  $\gamma \mapsto \gamma^i$ ,  $\Gamma \rightarrow \mathbb{Q}_p^*$ , sont linéairement indépendants sur  $\mathbb{Q}_p$  (car distincts), il vient que  $J_k(A[\Gamma](1+T)) = \mathcal{R}_A^+/T^k\mathcal{R}_A^+$ . Cela conclut car  $1+T \in (\mathcal{R}_A^+)^{\psi=0}$ .  $\square$

**Proposition 2.20.** Le  $\mathcal{R}_A^+(\Gamma)$ -module  $C(D^+)$  est isomorphe à l'idéal

$$\cap_{i \geq 0} (1 - \delta(p)p^i, \text{Ker}(\widetilde{x^i \delta}))$$

de  $\mathcal{R}_A^+(\Gamma)$ . Plus précisément, pour tout  $k$  assez grand  $J_k$  induit une suite exacte  $\mathcal{R}_A^+(\Gamma)$ -équivariante

$$0 \rightarrow C(D^+) \longrightarrow \mathcal{R}_A^+(\Gamma) \cdot (1+T) \xrightarrow{J_k} \oplus_{i=0}^{k-1} A/(1 - \delta(p)p^i) \cdot \widetilde{\delta x^i} \rightarrow 0.$$

(Comme  $1 - \delta(p)p^i$  est inversible dans  $A$  pour  $i$  assez grand, l'intersection ci-dessus est finie. De plus, le terme centrale est libre de rang 1 sur  $\mathcal{R}_A^+(\Gamma)$ .)

*Preuve* — En effet, soit  $k$  suffisamment grand de sorte que  $|\delta(p)p^k| < 1$ . Le lemme 2.9 (ii) assure que

$$(1 - \delta(p)\varphi)\mathcal{R}_A^+ = J_k^{-1}((1 - \delta(p)\varphi)\mathcal{R}_A^+/T^k\mathcal{R}_A^+).$$

Comme  $\mathcal{R}_A^+(\Gamma)$ -module on a

$$(1 - \varphi)\mathcal{R}_A^+(\delta)/T^k\mathcal{R}_A^+(\delta) = \oplus_{i=0}^{k-1} (1 - \delta(p)p^i)A(\widetilde{\delta x^i}).$$

Mais  $\mathcal{R}_A^+(\delta)^{\psi=0}$  est libre de rang 1 sur  $\mathcal{R}_A^+(\Gamma)$  engendré par  $1+T$  d'après la proposition 2.14. La proposition suit alors du lemme 2.19.  $\square$

Fixons un générateur topologique  $\gamma_0$  de  $\Gamma$  (resp. de  $1+4\mathbb{Z}_2$  si  $p=2$ ). On rappelle l'élément  $T_\delta \in A[\Gamma]$  défini dans le lemme 2.18 (ii). Pour  $i \in \mathbb{Z}$  on note  $T_i \in A[\Gamma]$  l'élément  $T_\delta$  où  $\delta(\gamma) = \gamma^i$  pour tout  $\gamma \in \Gamma$ .

**Définition 2.21.** On dira qu'un  $\mathcal{R}_A^+(\Gamma)$ -module  $D$  est presque libre de rang  $d$  si il existe une suite exacte de  $\mathcal{R}_A^+(\Gamma)$ -modules de la forme

$$0 \rightarrow \mathcal{R}_A^+(\Gamma)^d \rightarrow D \rightarrow Q \rightarrow 0$$

telle que  $Q$  est de type fini sur  $A$  et annulé par un monôme en des  $T_i$  pour  $i \in \mathbb{Z}$ . On dira que  $D$  est presque nul si il est presque libre de rang 0, c'est à dire de type fini sur  $A$  et annulé par un monôme en des  $T_i$  pour  $i \in \mathbb{Z}$ .

**Lemme 2.22.** (i) Les  $\mathcal{R}_A^+(\Gamma)$ -modules presque libres sont de type fini.

(ii) Soit  $0 \rightarrow D' \rightarrow D \rightarrow D'' \rightarrow 0$  une suite exacte de  $\mathcal{R}_A^+(\Gamma)$ -modules. Si  $D''$  (resp.  $D'$ ) est presque nul et  $D$  est presque libre de rang  $d$ , alors  $D'$  (resp.  $D''$ ) est presque libre de rang  $d$ .

(iii) Enfin, si on a une suite exacte longue de  $\mathcal{R}_A^+(\Gamma)$ -modules

$$D_1 \longrightarrow D_2 \longrightarrow D_3 \longrightarrow D_4 \longrightarrow D_5$$

avec  $D_1$  et  $D_5$  presque nuls,  $D_2$  et  $D_4$  presque libres de rang respectifs  $d_2$  et  $d_4$ , alors  $D_3$  est presque libre de rang  $d_2 + d_4$ .

*Preuve* — Le premier point est évident. Pour le second, soient  $L \subset D$  libre de rang  $d$  et  $M$  un monôme en les  $T_i$  tel que  $MD \subset L$ . Si  $M'$  est un autre tel monôme tel que  $M'D \subset D'$  alors le lemme 2.18 (ii) assure que  $M'L$  est libre de rang  $d$  et que  $L/M'L$  est de type fini sur  $A$ . Il vient que  $D/M'L$  est de type fini sur  $A$  annulé par  $MM'$ , ainsi donc que son sous-module  $D'/M'L$  par noethérianité de  $A$ , et donc  $D'$  est presque libre de rang  $d$  ce qui prouve le (ii) dans le premier cas. Dans le second cas  $D'$  est presque nul, donc  $D' \cap L = 0$  par le lemme 2.18 (ii). Ainsi, la projection  $\pi : D \rightarrow D''$  est injective sur  $L$  et  $D''/\pi(L)$  est un quotient du  $A$ -module presque nul  $D/L$ , ce qui conclut le (ii).

Pour le (iii), on peut supposer  $D_1 = D_5 = 0$  par le (ii). Si  $D_3$  est libre sur  $\mathcal{R}_A^+(\Gamma)$  alors la suite est scindée et le résultat suit. En général, quitte à remplacer  $D_2$  par l'image inverse dans  $D_2$  d'un sous- $\mathcal{R}_A^+(\Gamma)$ -module libre de  $D_3$  on peut donc supposer que  $D_3$  est presque nul, auquel cas l'affirmation est évidente.  $\square$

**Théorème 2.23.** *Soit  $D$  un  $(\varphi, \Gamma)$ -module triangulin de rang  $d$  sur  $\mathcal{R}_A$ . Alors les  $\mathcal{R}_A^+(\Gamma)$ -modules  $D^{\varphi=1}$  et  $D/(\psi-1)$  sont presque nuls, et  $D^{\psi=1}$  et  $C(D)$  sont presque libres de rang  $d$ .*

*Soit  $(\delta_i) \in \mathcal{T}^d(A)$  le paramètre de  $D$  et supposons de plus que pour tout  $i = 1, \dots, d$  et pour tout  $j \in \mathbb{N}$  alors  $1 - \delta_i(p)p^j$  est non diviseur de zéro dans  $A$  et  $1 - \delta_i(p)p^{-j} \in A^\times$ . Alors  $D^{\varphi=1} = D/(\psi-1) = 0$  et  $D^{\psi=1} \xrightarrow{\sim} C(D)$  est libre de rang  $d$  sur  $\mathcal{R}_A^+(\Gamma)$ .*

*Preuve* — On procède par récurrence sur  $d \geq 1$ . On a une suite exacte dans  $(\varphi, \Gamma)/A$

$$0 \longrightarrow D' \rightarrow D \rightarrow \mathcal{R}_A(\delta_d) \rightarrow 0$$

avec  $D'$  triangulin de rang  $d-1$ . Par la suite exacte longue de cohomologie associée et par le lemme 2.22 (iii), on peut supposer  $d = 1$ , i.e.  $D = \mathcal{R}_A(\delta)$ . Dans ce cas, il découle de la proposition 2.10 que  $D^{\varphi=1}$  et  $D/(\psi-1)$  sont presque nuls car  $1 - \delta(p)^{\pm 1}p^i$  est inversible dans  $A$  pour tout entier  $i$  assez grand, c'est aussi évidemment le cas de  $\text{Pol}(A, \mathbb{Z}_p)^{\delta(p)^{-1}\psi=1}$ . De plus, le premier de ces trois modules est nul si et seulement si  $1 - \delta(p)p^i$  est non diviseur de 0 dans  $A$  pour tout  $i \geq 0$ , et les deux autres le sont si et seulement si  $1 - \delta(p)p^{-i} \in A^\times$  pour tout  $i \geq 0$ . Sous ces hypothèses, le lemme 2.17 assure aussi que  $D^{\psi=1} \xrightarrow{\sim} C(D) = C(D^+)$  et la proposition 2.20 montre que  $C(D^+) = (D^+)^{\psi=0} = \mathcal{R}_A^+(\Gamma) \cdot (1+T)$  est libre de rang 1.  $\square$

Mentionnons qu'en général,  $C(D)$  n'est pas libre sur  $\mathcal{R}_A^+(\Gamma)$ , et ce même si  $D = \mathcal{R}_A(\delta)$ . En effet, considérons le cas particulier où  $\delta \in \mathcal{T}(A)$  est tel que  $1 - \delta(p)p^{-i}$  est non diviseur de 0 dans  $A$  pour tout  $i \geq 0$ , auquel cas  $C(D) = C(D^+)$ . On conclut par le résultat général suivant.

**Proposition 2.24.** *Soit  $\delta \in \mathcal{T}(A)$  tel que  $1 - \delta(p)p^i$  est non diviseur de 0 dans  $A$  pour tout  $i \geq 0$ . Alors  $C(\mathcal{R}_A^+(\Gamma))$  est projectif comme  $\mathcal{R}_A^+(\Gamma)$ -module si et seulement si  $1 - \delta(p)p^i \in A^\times$  pour tout  $i \geq 0$ , auquel cas il est en fait libre de rang 1.*

*Preuve* — Remarquons que si deux idéaux de type fini  $I$  et  $J$  d'un anneau commutatif  $B$  sont tels que l'idéal  $IJ$  est projectif comme  $B$ -module, et si de plus  $I + J = B$ , alors  $I$  et  $J$  sont des  $B$ -modules projectifs. En effet, être projectif de type fini est une propriété locale sur  $\text{Spec}(B)$ , mais si  $x \in \text{Spec}(B) \setminus V(I)$  alors  $I_x = B_x$ , et si  $x \in V(I)$  alors  $x \notin V(J)$  et donc  $J_x = B_x$  puis  $(IJ)_x = I_x J_x = I_x$ . D'après le lemme 2.25 ci-dessous et la proposition 2.20, il s'agit de voir que si  $I_\delta$  est projectif de rang fini, avec  $1 - \delta(p)$  non diviseur de 0 dans  $A$ , alors  $1 - \delta(p) \in A^\times$  (et donc  $I_\delta = \mathcal{R}_A^+(\Gamma)$ ). Fixons donc  $\delta \in \mathcal{T}(A)$  avec

$1 - \delta(p)$  non diviseur de 0 et supposons  $p > 2$  pour simplifier, de sorte que  $\text{Ker}(\tilde{\delta}) = (T_\delta)$ . La suite de  $\mathcal{R}_A^+(\Gamma)$ -modules

$$0 \longrightarrow \mathcal{R}_A^+(\Gamma) \xrightarrow{u \mapsto (T_\delta u, (1-\delta(p))u)} \mathcal{R}_A^+(\Gamma)^2 \xrightarrow{(x,y) \mapsto (1-\delta(p))x - T_\delta y} I_\delta \longrightarrow 0$$

est exacte. En effet, si  $x, y \in \mathcal{R}_A^+(\Gamma)$  satisfont  $xT_\delta = y(1 - \delta(p))$  alors en appliquant  $\tilde{\delta}$  il vient que  $0 = \tilde{\delta}(y)(1 - \delta(p)) \in A$  donc  $y = T_\delta u$  avec  $u \in \mathcal{R}_A^+(\Gamma)$  unique par le lemme 2.18, puis  $x = u(1 - \delta(p))$ . Comme la multiplication par chaque  $T_{\delta'}$  est injective sur  $I_\delta \subset \mathcal{R}_A^+(\Gamma)$  on en déduit que la suite ci-dessus est reste exacte modulo  $T_{\delta'}$  pour tout  $\delta'$ . L'isomorphisme naturel  $\tilde{\delta}' : \mathcal{R}_A^+(\Gamma)/(T_{\delta'}) \xrightarrow{\sim} A$  envoie tout  $\gamma \in \Gamma$  sur  $\delta'(\gamma)$ . Si  $\gamma$  engendre topologiquement  $\Gamma$  on obtient donc une suite exacte

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{u \mapsto ((\delta'(\gamma) - \delta(\gamma))u, (1-\delta(p))u)} A \xrightarrow{(x,y) \mapsto (1-\delta(p))x - (\delta'(\gamma) - \delta(\gamma))y} I_\delta/T_{\delta'}I_\delta \longrightarrow 0,$$

et donc

$$I_\delta/T_{\delta'}I_\delta \simeq A^2/A(1 - \delta(p), \delta'(\gamma) - \delta(\gamma)).$$

On conclut en appliquant ceci à  $\delta' = \delta$  : si le  $\mathcal{R}_A^+(\Gamma)$ -module  $I_\delta$  est projectif il en va de même du  $A$ -module  $A/(1 - \delta(p)) \times A$ . Comme  $1 - \delta(p)$  est non diviseur de 0 dans  $A$ , cela entraîne qu'il est inversible, ce qui conclut. L'argument est similaire pour  $p = 2$ .  $\square$

**Lemme 2.25.** *Pour  $\delta \in \mathcal{T}(A)$ , notons  $I_\delta$  l'idéal  $(1 - \delta(p), \text{Ker}(\tilde{\delta}))$  de  $\mathcal{R}_A^+(\Gamma)$ . Alors pour tout  $i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  on a  $I_\delta + I_{\delta x^i} = \mathcal{R}_A^+(\Gamma)$ . En particulier,  $C(\mathcal{R}_A^+(\delta)) = \prod_{i \geq 0} I_{\delta x^i}$ .*

*Preuve* — En effet,  $(1 - \delta(p)p^i) - (1 - \delta(p)) = \delta(p)(1 - p^i) \in A^\times$  si  $i \neq 0$ .  $\square$

De la discussion précédent la proposition 2.24 on déduit le :

**Corollaire 2.26.** *Soit  $\delta \in \mathcal{T}(A)$  tel que  $1 - \delta(p)p^i$  est non diviseur de 0 dans  $A$  pour tout  $i \in \mathbb{Z}$ . Alors le  $\mathcal{R}_A^+(\Gamma)$ -module  $C(\mathcal{R}_A^+(\delta))$  est projectif si et seulement si  $1 - \delta(p)p^i \in A^\times$  pour tout  $i \geq 0$ , auquel cas il est libre de rang 1.*

**2.27. Cohomologie de  $\mathcal{R}_A(\delta)$  partie III : calcul du  $H^1$ .** Le calcul de  $H^1(\mathcal{R}_A(\delta))$  est maintenant une formalité. On rappelle que  $x \in \mathcal{T}(\mathbb{Q}_p)$  désigne le caractère tautologique identité et que  $\chi \in \mathcal{T}(\mathbb{Q}_p)$  est le caractère tel que  $\chi(p) = 1$  et  $\chi|_{\mathbb{Z}_p^\times} = x|_{\mathbb{Z}_p^\times}$  ("caractère cyclotomique").

**Définition 2.28.** *On désigne par  $\mathcal{T}^{\text{reg}} \subset \mathcal{T}$  l'ouvert complémentaire de l'ensemble discret<sup>15</sup> des points  $\mathbb{Q}_p$ -rationnels de la forme  $x^{-i}$  ou  $\chi x^i$  pour  $i \geq 0$ .*

*Un caractère  $\delta \in \mathcal{T}(A)$  est dit régulier si il est dans  $\mathcal{T}^{\text{reg}}(A)$ , ce qui revient à dire que pour tout  $z \in \text{Sp}(A)$  le caractère  $\delta_z : \mathbb{Q}_p^\times \rightarrow k(z)^\times$  obtenu par évaluation en  $z$  n'est pas de la forme  $x^i$  ou  $\chi x^{-i}$  pour  $i \geq 0$  entier.*

On note  $K(A)$  le groupe de Grothendieck des  $A$ -modules de type fini, et si  $M$  est un tel  $A$ -module on note  $[M]$  sa classe dans  $K(A)$ . On rappelle qu'une algèbre affinoïde est noethérienne.

**Théorème 2.29.** *Soit  $D$  un  $(\varphi, \Gamma)$ -module triangulin de rang  $d$  sur  $\mathcal{R}_A$ . Alors  $H^i(D)$  est de type fini sur  $A$  pour tout entier  $i$  et on a la relation dans  $K(A)$*

$$[H^0(D)] - [H^1(D)] + [H^2(D)] = -[A^d].$$

<sup>15</sup>Ils sont discrets au sens que tout ouvert affinoïde de  $\mathcal{T}$  ne rencontre qu'un nombre fini de tels points.

Si de plus le paramètre  $(\delta_i)$  de  $D$  est dans  $\mathcal{T}^{\text{reg}}(A)^d$ , alors  $H^0(D) = H^2(D) = 0$  et  $H^1(D)$  est libre de rang  $d$  sur  $A$ . Enfin, si  $D = \mathcal{R}_A(\delta)$  avec  $\delta \in \mathcal{T}^{\text{reg}}(A)$ , les quatre morphismes naturels

$$(D^+)^{\psi=0}/(\gamma-1) \leftarrow C(D^+)/(\gamma-1) \rightarrow C(D)/(\gamma-1) \leftarrow D^{\psi=1}/(\gamma-1) \rightarrow H^1(D)$$

sont des isomorphismes, un générateur de  $(D^+)^{\psi=0}/(\gamma-1)$  étant donné par la classe de  $1 + T$ .

*Preuve* — Par récurrence sur  $d$  et en utilisant la suite longue de cohomologie, on peut supposer que  $d = 1$ , i.e.  $D = \mathcal{R}_A(\delta)$ . On a déjà vu que  $D^{\varphi=1}$  et  $D/(\psi-1)$  sont de type fini sur  $A$ , et donc à plus forte raison que  $H^0(D)$  et  $H^2(D)$  le sont aussi. Pour vérifier le premier point du théorème, et compte tenu du dévissage donné par le théorème 2.3, il suffit donc de démontrer que  $C(D)/(\gamma-1)$  est de type fini sur  $A$  et de classe  $[A^d]$  dans  $K(A)$ . (On rappelle que si  $X$  est un  $A$ -module de type fini et  $u \in \text{End}_A(X)$  alors la multiplication par  $u$  sur  $X$  implique l'identité  $[X^{u=0}] = [X/u(X)]$  dans  $K(A)$ .) Les deux suites exactes données par le lemme 2.17 (ii) et la proposition 2.20 induisent des suites exactes

$$(2.3) \quad \begin{aligned} 0 &\rightarrow \text{Pol}(\mathbb{Z}_p, A)^{\delta(p)^{-1}\psi=1, \gamma=1} \rightarrow C(D^+)/(\gamma-1) \rightarrow \\ &C(D)/(\gamma-1) \xrightarrow{(1-\varphi)^{-1}C} \text{Pol}(\mathbb{Z}_p, A)^{\delta(p)^{-1}\psi=1}/(\gamma-1) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

$$(2.4) \quad \begin{aligned} 0 &\rightarrow (\oplus_{i=0}^{k-1} A/(1-\delta(p)p^i) \cdot \widetilde{\delta x^i})^{\gamma=1} \rightarrow C(D)^+/(\gamma-1) \rightarrow \\ &\mathcal{R}_A^+(\Gamma) \cdot (1+T)/(\gamma-1) \xrightarrow{J_k} (\oplus_{i=0}^{k-1} A/(1-\delta(p)p^i) \cdot \widetilde{\delta x^i})/(\gamma-1) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

car  $\gamma-1$  est injectif sur  $C(D)$  et  $(\mathcal{R}_A^+)^{\psi=0}$  (théorème 2.4). On conclut car  $\mathcal{R}_A^+(\Gamma)/([\gamma]-1) = A$  (lemme 2.18 pour  $\delta = 1$ ).

Supposons maintenant  $\delta$  régulier. Dans ce cas, les noyaux et conoyaux de  $\gamma-1$  sur  $D^{\varphi=1}$ ,  $D/(\psi-1)$ ,  $\text{Pol}(\mathbb{Z}_p, A)^{\delta(p)^{-1}\psi=1}$  et  $\oplus_{i \geq 0} A/(1-\delta(p)p^i) \cdot \widetilde{\delta x^i}$  sont tous nuls par hypothèse. En effet, si  $a, b \in A$  sont tels que  $(a, b) = A$ , alors la multiplication par  $a$  est bijective sur  $A/bA$  et  $A[b]$  (la  $b$ -torsion dans  $A$ ): si  $au + bv = 1$  la multiplication par  $u$  en est un inverse. Cela montre que  $H^0(D) = H^2(D) = 0$  puis que les quatre flèches de l'énoncé sont des isomorphismes. En particulier,  $H^1(D)$  est isomorphe à  $\mathcal{R}_A^+(\Gamma)/(\gamma-1) = A$ .  $\square$

**Théorème 2.30.** Soient  $A \rightarrow B$  un morphisme de  $\mathbb{Q}_p$ -algèbres affinoïdes et  $D$  un  $(\varphi, \Gamma)$ -module triangulin sur  $\mathcal{R}_A$ . Supposons que  $A \rightarrow B$  est plat ou que le paramètre de  $D$  est régulier. Alors pour tout entier  $i$  l'application naturelle

$$H^i(D) \otimes_A B \rightarrow H^i(D \widehat{\otimes}_A B)$$

est un isomorphisme.

*Preuve* — L'application de l'énoncé est celle déduite du  $A$ -morphisme de complexes  $C_{\varphi, \Gamma}(D)^\bullet \rightarrow C_{\varphi, \Gamma}(D \widehat{\otimes}_A B)^\bullet$ . En particulier, si on a une suite exacte de  $(\varphi, \Gamma)$ -modules sur  $\mathcal{R}_A$  disons  $0 \rightarrow D_1 \rightarrow D_2 \rightarrow D_3 \rightarrow 0$ , et donc une suite exacte  $0 \rightarrow D_1 \widehat{\otimes}_A B \rightarrow D_2 \widehat{\otimes}_A B \rightarrow D_3 \widehat{\otimes}_A B \rightarrow 0$ , on dispose d'une morphisme  $A$ -linéaire naturel entre les suites exactes longues de cohomologie. Il vient que par dévissage et par le lemme des 5, on peut supposer  $D = \mathcal{R}_A(\delta)$  est de rang 1.

Soit  $\delta \in \mathcal{T}(A)$ , on note  $\delta_B$  l'image de  $\delta$  dans  $\mathcal{T}(B)$ . Remarquons que si  $F(\delta)$  désigne le  $A[\varphi, \Gamma]$ -module  $A[t](\delta)$  et  $\text{Pol}(\mathbb{Z}_p, A)(\delta)$ , alors l'application naturelle  $F(\delta) \otimes_A B \rightarrow F(\delta_B)$  est un isomorphisme. En particulier, pour  $* \in \{\varphi, \psi\}$  et si  $C_{*, \Gamma}(F(\delta))$  désigne le complexe à trois termes évident, dont on désignera par  $H_*^i(F(\delta))$  le  $A$ -module de cohomologie, et si  $A \rightarrow B$  est plat, alors

$$H_*^i(F(\delta)) \otimes_A B \xrightarrow{\sim} H_*^i(F(\delta) \otimes_A B) \xrightarrow{\sim} H_*^i(F(\delta_B)).$$



Mais on a défini (prop. 2.10) des isomorphismes naturels  $H_\varphi^0(F(\delta)) \xrightarrow{\sim} H^0(\mathcal{R}_A(\delta))$  et  $H^2(\mathcal{R}_A(\delta)) \xrightarrow{\sim} H_\psi^2(F(\delta))$  ( $F$  valant respectivement  $A[t]$  dans le premier cas et  $\text{Pol}$  dans le second), le théorème en découle pour  $i = 0, 2$ .

Supposons toujours  $D = \mathcal{R}_A(\delta)$ . Par un argument similaire à celui ci-dessus utilisant les suites exactes (2.3) et (2.4), et le fait que la formation des modules  $(D^+)^{\psi=0}$ ,  $D^{\psi=1}$ ,  $C(D)$  et  $C(D^+)$  est fonctorielle en  $A$ , ainsi donc que leurs quotients par  $\gamma - 1$ , le théorème suit dans le cas  $i = 1$  si l'on montre que pour tout morphisme  $A \rightarrow B$  l'application naturelle

$$f : (\mathcal{R}_A^+(\delta))^{\psi=0}/(\gamma - 1) \otimes_A B \rightarrow (\mathcal{R}_B^+(\delta_B))^{\psi=0}/(\gamma - 1)$$

est un isomorphisme. Mais on a déjà vu que  $\mathcal{R}_A^+(\delta)^{\psi=0}$  est libre sur  $\mathcal{R}_A^+(\Gamma)$  engendré par  $1 + T$ , de sorte que son quotient par  $\gamma - 1$  est libre sur  $A$  engendré par la classe  $\overline{1 + T}$  de  $1 + T$ . Mais par construction  $f$  provient par quotient du morphisme évident  $\mathcal{R}_A^+(\delta)^{\psi=0} \rightarrow \mathcal{R}_B^+(\delta_B)^{\psi=0}$  qui envoie  $1 + T$  sur  $1 + T$ .  $\square$

Remarquons que jusqu'ici nous n'avons pas donné d'énoncé exact sur la structure de  $H^1(\mathcal{R}_A(\delta))$  quand  $\delta$  n'est pas régulier. Si l'on concatène les suites exactes données par la proposition 2.3 et les formules (2.3) et (2.4) nous en obtenons un dévissage explicite, bien que peu ragoûtant en général. Ce dévissage se simplifie dans le cas utile suivant.

**Définition 2.31.** *On dit que  $\delta \in \mathcal{T}(A)$  est bien placé si :*

- (i) *pour tout  $i \in \mathbb{Z}$ , alors  $1 - \delta(p)p^i$  est non diviseur de 0 dans  $A$ ,*
- (ii) *pour tout  $i \geq 0$ , l'image de  $1 - \delta(\gamma)\gamma^{1-i}$  dans<sup>16</sup>  $A/(1 - \delta(p)p^{-i})$  est non diviseur de 0.*

**Proposition 2.32.** *Si  $\delta \in \mathcal{T}(A)$  est bien placé et  $D = \mathcal{R}_A(\delta)$ , alors  $H^0(D) = 0$  et les morphismes naturels*

$$C(D^+)/(\gamma - 1) \rightarrow C(D)/(\gamma - 1) \leftarrow D^{\psi=1}/(\gamma - 1) \rightarrow H^1(D)$$

*sont des isomorphismes. On a de plus une suite exacte naturelle de  $A$ -modules*

$$0 \longrightarrow \prod_{i \geq 0} (A/(1 - \delta(p)p^i))[1 - \delta(\gamma)\gamma^i] \longrightarrow H^1(D) \longrightarrow \bigcap_{i \geq 0} (1 - \delta(p)p^i, 1 - \delta(\gamma)\gamma^i) \longrightarrow 0.$$

L'intersection dans le terme de droite de cette dernière suite est sous-entendue à l'intérieur de  $A$  (c'est donc un idéal de  $A$ ).

*Preuve* — En effet, l'annulation de  $D^{\varphi=1}$ ,  $D/(\psi - 1)^{\gamma=1}$  et  $\text{Pol}(\mathbb{Z}_p, A)^{\delta(p)^{-1}\psi=1}$  équivaut au caractère bien placé de  $\delta$ , et on conclut la première assertion par la proposition 2.3 et la suite exacte (2.3). D'après la proposition 2.20, on a une suite exacte de  $\mathcal{R}_A^+(\Gamma)$ -modules

$$0 \longrightarrow C(D^+) \longrightarrow \mathcal{R}_A^+(\Gamma) \longrightarrow \prod_{i \geq 0} A/(1 - \delta(p)p^i)(\delta) \longrightarrow 0$$

dont la dernière assertion se déduit en appliquant  $\gamma = 1$ , en utilisant que  $(\gamma - 1)$  est injectif sur  $\mathcal{R}_A^+(\Gamma)$  (lemme 2.18 pour  $\delta = 1$ ). (Quand  $p = 2$  l'argument ci-dessus et l'énoncé ne sont évidemment pas tout à fait corrects)  $\square$

Terminons par un cas particulier important concernant le caractère universel. Si  $U \subset \mathcal{T}$  est un ouvert affinoïde, on désigne par  $\delta_U \in \mathcal{T}(U)$  le caractère tautologique.

<sup>16</sup>Si  $p = 2$ , il faut remplacer  $A/(1 - \delta(p)p^{-i})$  par  $A/(\delta(-1) + 1, 1 - \delta(p)p^{-i})$ .

**Théorème 2.33.** *Pour tout ouvert affinoïde  $U \subset \mathcal{T}$ ,  $H^0(\mathcal{R}_U(\delta_U)) = 0$  et le  $\mathcal{O}(U)$ -module  $H^1(\mathcal{R}_U(\delta_U))$  s'identifie naturellement à l'idéal de  $\mathcal{O}(U)$  constitué des fonctions qui s'annulent en tous les points de  $U$  paramétrant les caractères de la forme  $x^{-i}$  pour  $i \geq 0$ .*

*De plus, pour tout  $z \in U$ , de caractère associé  $\delta_z$ , l'application naturelle*

$$H^1(\mathcal{R}_U(\delta_U)) \otimes_{\mathcal{O}(U)} k(z) \longrightarrow H^1(\mathcal{R}_{k(z)}(\delta_z))$$

*est un isomorphisme, à moins que  $\delta_z$  ne soit de la forme  $\chi x^i$  avec  $i \geq 0$ , auquel cas cette application est nulle.*

*Plus précisément, supposons que le seul point non régulier de  $U$ , disons  $u \in U$ , paramètre un caractère de la forme  $\chi x^i$  avec  $i \geq 0$  et soit  $m = m_u \subset \mathcal{O}(U)$  l'idéal maximal des fonctions s'annulant en ce point. On a  $k(u) = \mathbb{Q}_p$  et on considère l'espace tangent  $T_u = \text{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(m/m^2, \mathbb{Q}_p)$ . Alors :*

- (i) *Le morphisme naturel  $H^1(m\mathcal{R}_U(\delta)) \rightarrow H^1(\mathcal{R}_U(\delta_U))$  est un isomorphisme entre  $\mathcal{O}(U)$ -module libres de rang 1,*
- (ii) *Le  $\mathcal{O}(U)$ -morphisme canonique  $m \rightarrow m/m^2$  induit une injection*

$$H^1(m\mathcal{R}_U(\delta_U)) \otimes_{\mathcal{O}(U)} k(u) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(T_u, H^1(\mathcal{R}(\chi x^i)))$$

*dont l'image est une droite constituée d'isomorphismes. En particulier, cette droite induit un isomorphisme canonique  $\mathbb{P}(T_u) \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}(H^1(\mathcal{R}(\chi x^i)))$  entre espaces projectifs sur  $\mathbb{Q}_p$  de dimension 1.*

On notera le rôle non symétrique joué ici par les points singuliers de la forme  $x^{-i}$  et ceux de la forme  $\chi x^i$ . Nous préciserons un peu plus loin ce théorème en introduisant l'éclaté de  $U$  aux points non réguliers, ce qui nous permettra notamment de comprendre complètement la structure analytique de l'espace des  $(\varphi, \Gamma)$ -modules triangulins de rang 2, y compris au voisinage des points de paramètre singulier : c'est exactement la structure suggérée par Colmez dans sa définition de l'espace des triangulines en rang 2.

*Preuve* — Le caractère  $\delta_U$  est évidemment bien placé. De même, pour tout  $i \geq 0$  l'élément  $1 - \delta(\gamma)\gamma^i$  n'est pas diviseur de zéro sur l'anneau (localement intègre)  $\mathcal{O}(U)/(1 - \delta(p)p^i)$ . La première assertion découle donc de la proposition 2.32. Pour vérifier la seconde assertion, il résulte de la commutativité de  $H^1$  au changement de base plat (ici une immersion ouverte) que l'on peut supposer que  $U$  ne contient qu'un seul point singulier, disons  $z$ . Si  $m \subset \mathcal{O}(U)$  désigne l'idéal maximal des fonctions qui s'annulent en  $z$ , alors il est classique que si  $a = \delta_U(p) - \delta_z(p)$  et  $b = \delta_U(\gamma) - \delta_z(\gamma)$  alors  $m = (a, b)$  et on a des suites exactes

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(U) \xrightarrow{f \mapsto (af, bf)} \mathcal{O}(U)^2 \xrightarrow{(f, g) \mapsto af - bg} m \longrightarrow 0,$$

et

$$0 \longrightarrow m \longrightarrow \mathcal{O}(U) \longrightarrow k(z) \longrightarrow 0.$$

Comme  $\mathcal{R}_U$  est plat sur  $\mathcal{O}(U)$  (lemme 1.3 (vi)), ces suites restent exactes après  $- \otimes_{\mathcal{O}(U)} D$ ,  $D = \mathcal{R}_U(\delta_U)$ , de sorte qu'en prenant la suite longue de cohomologie on obtienne des suites exactes de  $\mathcal{O}(U)$ -modules

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow H^0(mD) \longrightarrow H^1(D) \xrightarrow{(a, b)} H^1(D)^2 \longrightarrow H^1(mD) \longrightarrow H^2(D) \xrightarrow{(a, b)} H^2(D)^2 \longrightarrow H^2(mD) \longrightarrow 0, \\ 0 \longrightarrow H^0(D_z) \longrightarrow H^1(mD) \longrightarrow H^1(D) \longrightarrow H^1(D_z) \longrightarrow H^2(mD) \longrightarrow H^2(D) \longrightarrow H^2(D_z) \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

On a utilisé que  $D \otimes_{\mathcal{O}(U)} m = mD$  (platitude de  $\mathcal{R}_U$  sur  $\mathcal{O}(U)$ ).

Si  $\delta_z = x^{-i}$ , alors la proposition 2.10 assure que  $H^2(D) = H^2(D_z) = 0$ . On déduit des suites ci-dessus qu'alors  $H^2(mD) = 0$  puis que  $H^1(D) \rightarrow H^1(D_z)$  est surjectif. Comme  $H^1(D) \simeq m$  et que  $m/m^2$  et  $H^1(D_z)$  sont de dimension 2 sur  $k(z)$ , l'application  $H^1(D) \otimes_{\mathcal{O}(U)} k(z) \rightarrow H^1(D_z)$  est un isomorphisme.

Si  $\delta_z = \chi x^i$ , la proposition 2.10 assure que  $H^2(D) \simeq k(z)$  est tué par  $m$ , de sorte que la flèche  $H^2(D) \rightarrow H^2(D)^2$  ci-dessus est nulle. Ainsi,  $H^2(D)^2 \xrightarrow{\sim} H^2(mD)$  et ce dernier est isomorphe à  $k(z)^2$ . Comme d'autre part  $H^2(D) \rightarrow H^2(D_z)$  est un isomorphisme (car surjectif), on en déduit que  $H^1(D_z) \rightarrow H^2(mD)$  est surjective : c'est donc un isomorphisme pour des raisons de dimension. Ainsi,  $H^1(D) \rightarrow H^1(D_z)$  est nul. Comme  $H^0(D_z) = 0$  on en déduit enfin  $H^1(mD) = H^1(D)$  : il ne reste qu'à prouver le (ii) du théorème.

Comme  $m/m^2$  est annulé par  $m$ , il vient que  $D \otimes_{\mathcal{O}(U)} (m/m^2) = D_z \otimes_{\mathbb{Q}_p} (m/m^2)$  (avec action de  $\varphi$  et  $\Gamma$ ). On en déduit pour tout  $i$  un isomorphisme canonique de  $\mathcal{O}(U)$ -modules

$$H^i(D \otimes_{\mathcal{O}(U)} (m/m^2)) \xrightarrow{\sim} H^i(D_z) \otimes_{\mathbb{Q}_p} (m/m^2) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(T_z, H^i(D_z)).$$

Remarquons que  $T_z$  et  $H^1(D_z)$  sont des  $\mathbb{Q}_p$ -espace vectoriel de dimension 2. Considérons le morphisme

$$\mu : H^1(mD) \rightarrow H^1(D \otimes_{\mathcal{O}(U)} m/m^2) = \text{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(T_z, H^1(D_z))$$

déduit du morphisme naturel  $mD \rightarrow mD/m^2D = (m/m^2) \otimes_{\mathcal{O}(U)} D$  (on rappelle que  $\mathcal{R}_U$  est plat sur  $\mathcal{O}(U)$ ). Comme  $H^1(mD) = H^1(D)$  est libre de rang 1, son image dans  $\text{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(T_z, H^1(D_z))$  est soit nulle soit une  $\mathbb{Q}_p$ -droite. Si  $L \neq 0 \subset T_z$ ,  $\mu(L)$  est par définition l'élément de  $H^1(D_z)$  obtenu comme composé de  $\mu$  et de l'application naturelle  $(L \otimes 1) : (m/m^2) \otimes_{\mathbb{Q}_p} D_z \rightarrow D_z$ , ou ce qui revient au même comme image de l'application  $\mathcal{O}(U)$ -linéaire naturelle  $mD \rightarrow D_z$  après passage au  $H^1$ . Soit  $m^2 \subset J \subset m$  le noyau de  $L$ . La suite exacte de  $\mathcal{O}(U)$ -modules  $0 \rightarrow J \rightarrow m \rightarrow m/J = k(z) \rightarrow 0$  reste exacte après extension des scalaires à  $\mathcal{R}_U$ , de sorte que l'on dispose d'une suite longue de  $\mathcal{O}(U)$ -modules

$$H^1(mD) \rightarrow H^1(D_z) \rightarrow H^2(JD) \rightarrow H^2(mD) \rightarrow H^2(D_z) \rightarrow 0.$$

L'image de la première flèche est le  $\mathbb{Q}_p$ -module engendré par  $\mu(L)$ . Pour conclure il suffit donc de voir que le noyau de la flèche  $H^1(D_z) \rightarrow H^2(JD)$  est une droite. On a déjà vu que  $H^1(D_z) \simeq H^2(mD)$  et  $H^2(D_z)$  sont de  $\mathbb{Q}_p$ -dimensions respectives 2 et 1, il suffit donc de voir que  $H^2(JD)$  est de dimension 2 sur  $\mathbb{Q}_p$ . Mais tout comme  $m$ , l'idéal  $J$  a deux générateurs et admet une présentation de la forme

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(U) \xrightarrow{g} \mathcal{O}(U)^2 \longrightarrow J \longrightarrow 0$$

avec  $g \otimes_{\mathcal{O}(U)} k(u) = 0$ , de sorte qu'un argument déjà donné plus haut montre que  $H^2(D)^2 \simeq H^2(JD)$ , ce qui conclut la preuve du théorème.  $\square$

### 3. L'ESPACE DES $(\varphi, \Gamma)$ -MODULES TRIANGULINS SUR $\mathcal{R}_A$

**3.1.  $(\varphi, \Gamma)$ -modules triangulins réguliers rigidifiés.** Fixons  $d \geq 1$  un entier. L'espace  $\mathcal{T}^d$  est muni d'une famille universelle  $(\tilde{\delta}_i)$  de caractères  $\tilde{\delta}_i : \mathbb{Q}_p^* \rightarrow \mathcal{O}(\mathcal{T}^d)^*$ . On notera

$$\mathcal{T}_d^{\text{reg}} \subset \mathcal{T}^d$$

l'ouvert admissible (en fait, de Zariski) défini par les relations  $\tilde{\delta}_i/\tilde{\delta}_j \in \mathcal{T}^{\text{reg}}$  pour tout  $1 \leq i < j \leq d$ . Par définition, si  $A$  est une algèbre affinoïde alors  $\mathcal{T}_d^{\text{reg}}(A)$  est donc le sous-ensemble des  $(\delta_i) \in \mathcal{T}(A)^d$  tels que  $\delta_i/\delta_j \in \mathcal{T}^{\text{reg}}(A)$  pour tout  $1 \leq i < j \leq d$ .

**Définition 3.2.** Un  $(\varphi, \Gamma)$ -module triangulin régulier rigidifié est un triplet  $(D, \text{Fil}_{\bullet}(D), \nu)$  sur  $\mathcal{R}_A$  où :

- $(D, \text{Fil}_{\bullet}(D))$  est un  $(\varphi, \Gamma)$ -module triangulin sur  $\mathcal{R}_A$  dont le paramètre  $(\delta_i)$  est dans  $\mathcal{T}_d^{\text{reg}}(A)$  (condition de régularité),
- $\nu = (\nu_i)$  est une famille d'isomorphismes  $\nu_i : \text{Fil}_{i+1}(D)/\text{Fil}_i(D) \xrightarrow{\sim} \mathcal{R}_A(\delta_i)$  dans  $(\varphi, \Gamma)/A$  pour  $i = 0, \dots, \text{rang}_{\mathcal{R}_A}(D) - 1$  (rigidification).

Deux tels triplets  $(D, \text{Fil}_\bullet(D), \nu)$  et  $(D', \text{Fil}_\bullet(D'), \nu')$  seront dit équivalents si il existe un isomorphisme  $f : D \rightarrow D'$  dans  $(\varphi, \Gamma)/A$  envoyant  $\text{Fil}_i(D)$  sur  $\text{Fil}_i(D')$  pour tout  $i$  (auquel cas  $D$  et  $D'$  ont même paramètre) et tel que  $\nu'_i \circ f = \nu_i$  pour tout  $i = 0, \dots, \text{rang}_{\mathcal{R}_A}(D) - 1$ .

Considérons le foncteur

$$F_d^\square : \text{Aff} \longrightarrow \text{Ens}$$

de la catégorie  $\text{Aff}$  des  $\mathbb{Q}_p$ -algèbres affinoïdes vers celle  $\text{Ens}$  des ensembles associant à chaque objet  $A$  l'ensemble<sup>17</sup> des classes d'équivalence de  $(\varphi, \Gamma)$ -modules triangulins  $p$ -réguliers rigidifiés sur  $\mathcal{R}_A$ . Si  $u = (D, \text{Fil}_\bullet(D), \nu) \in F_d^\square(A)$  et si  $f : A \rightarrow B$  est un morphisme dans  $\text{Aff}$ , on pose bien entendu

$$F_d^\square(f)(u) = (D \hat{\otimes}_A B, (\text{Fil}_i(D) \hat{\otimes}_A B), (\nu_i \otimes_{\mathcal{R}_A} \mathcal{R}_B)) \in F_d^\square(B),$$

ce qui fait bien de  $F_d^\square$  un foncteur covariant. Le paramètre fournit un morphisme de foncteurs  $\delta : F_d^\square \rightarrow \mathcal{T}_d^{\text{reg}}$ .

**Théorème 3.3.** *Le foncteur  $F_d^\square$  est représentable par un espace analytique  $p$ -adique  $\mathcal{S}_d^\square$ . Le morphisme  $\delta : \mathcal{S}_d^\square \rightarrow \mathcal{T}_d^{\text{reg}}$  est lisse de dimension relative  $\frac{d(d-1)}{2}$ . L'espace  $\mathcal{S}_d^\square$  est irréductible, régulier, et équidimensionnel de dimension  $\frac{d(d+3)}{2}$ .*

Nous aurons besoin du lemme suivant.

**Lemme 3.4.** *(Rigidité) Soient  $(D, \text{Fil}_\bullet(D), \nu)$  et  $(D', \text{Fil}_\bullet(D'), \nu')$  des  $(\varphi, \Gamma)$ -modules triangulins réguliers rigidifiés sur  $\mathcal{R}_A$ . S'ils sont équivalents, alors il existe une unique équivalence entre eux.*

*Preuve* — On peut supposer  $(D, \text{Fil}_\bullet(D), \nu) = (D', \text{Fil}_\bullet(D'), \nu')$  et il s'agit de voir que ce triplet a pour seule auto-équivalence l'identité. Si  $f : D \rightarrow D$  en est une, alors par hypothèse  $f(\text{Fil}_i(D)) = \text{Fil}_i(D)$  et  $f$  induit l'identité sur chaque  $\text{Fil}_{i+1}(D)/\text{Fil}_i(D)$ . Ainsi,  $u := f - \text{id} \in \text{End}_{(\varphi, \Gamma)/A}(D)$  a la propriété que  $u(\text{Fil}_{i+1}(D)) \subset \text{Fil}_i(D)$  pour tout  $i < \text{rang}_{\mathcal{R}_A}(D)$ . Pour voir que  $u = 0$  il suffit donc de voir que

$$\text{Hom}_{(\varphi, \Gamma)/A}(\mathcal{R}_A(\delta_j), \mathcal{R}_A(\delta_i)) = 0$$

dès que  $j > i$ , soit encore que  $H^0(\mathcal{R}_A(\delta_i \delta_j^{-1})) = 0$  sous cette hypothèse. Mais ceci vient de ce que  $\delta_i \delta_j^{-1}$  est régulier et du théorème 2.29.  $\square$

Démontrons maintenant le théorème. Quand  $d = 1$ ,  $F_d^\square = \mathcal{T}$  et le résultat est évident. Pour  $d \geq 2$  on procède par récurrence sur  $d$ . On dispose d'un morphisme de foncteurs évident  $F_d^\square \rightarrow F_{d-1}^\square \times F_1^\square = \mathcal{S}_{d-1}^\square \times \mathcal{T}$ , associant à la classe de  $(D, \text{Fil}_\bullet(D), \nu) \in F_d^\square(A)$  la paire formée de la classe de  $(\text{Fil}_{d-1}(D), (\text{Fil}_i(D))_{i \leq d-1}, (\nu_i)_{1 \leq i \leq d-1})$  et de  $\delta_d$ . Il se factorise par l'ouvert Zariski

$$U_d \subset \mathcal{S}_{d-1}^\square \times \mathcal{T}$$

qui est l'image inverse de l'ouvert  $\mathcal{T}_d^{\text{reg}} \subset \mathcal{T}_{d-1}^{\text{reg}} \times \mathcal{T}$  par le morphisme paramètre  $\pi_d : \mathcal{S}_{d-1}^\square \times \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}_{d-1}^{\text{reg}} \times \mathcal{T}$ . Nous allons démontrer que le morphisme ci-dessus  $F_d^\square \rightarrow U_d$  est relativement représentable par un fibré vectoriel de rang  $d - 1$ , ce qui prouvera le théorème. Le fibré en question sera trivial au dessus de tout ouvert affinoïde de  $U_d$ .

Nous aurons besoin d'un sorite préliminaire. Soient  $A$  une  $\mathbb{Q}_p$ -algèbre affinoïde et  $u = (c_A, \delta_d) \in U_d(A)$  et  $x = (D_A, \text{Fil}_\bullet, \nu)$  un représentant de la classe  $c_A$ . Considérons le  $A$ -module  $M(u) = H^1(D_A(\delta_d^{-1}))$ . Si  $y = (D'_A, \text{Fil}_\bullet, \nu')$  est équivalent à  $x$ , l'unique équivalence

<sup>17</sup>Pour les raisons usuelles il ne s'agit pas vraiment d'un ensemble. Pour contourner ce problème il suffit de rajouter une fois pour toutes dans la définition d'un  $(\varphi, \Gamma)$ -module triangulin régulier rigidifié de rang  $d$  sur  $\mathcal{R}_A$  que le  $\mathcal{R}_A$ -module sous-jacent est  $\mathcal{R}_A^d$  (plutôt que simplement, isomorphe à  $\mathcal{R}_A^d$ ).

$y \rightarrow x$  identifie donc canoniquement  $M(y)$  et  $M(x)$ . Ainsi, il y a un sens à définir le  $A$ -module  $M(u)$  associé à un élément  $u \in U_d(A)$ , comme étant par exemple la limite inductive des  $M(x)$  pour  $x$  parcourant l'ensemble<sup>18</sup> des représentants de  $c_A$  : le choix d'un représentant  $x$  de  $c_A$  fournit alors un isomorphisme canonique  $M(c_A) \xrightarrow{\sim} M(x)$ . On vérifie de suite que si  $A \rightarrow B$  est un morphisme entre algèbres affinoïdes, alors pour tout  $u_A \in U_d(A)$ , d'image  $u_B \in U_d(B)$ , on dispose d'un morphisme canonique

$$M(u_A) \otimes_A B \longrightarrow M(u_B)$$

défini de manière évidente sur les représentants. Les théorèmes 2.30 et 2.29 assurent que c'est un isomorphisme entre modules libres de rang  $d - 1$ . En particulier  $\Omega \mapsto M(\Omega)$ , pour  $\Omega \subset U_d$  ouvert affinoïde, définit un faisceau cohérent sur  $U_d$  tel qu'en fait  $M(\Omega)$  est libre de rang  $d - 1$  sur  $\mathcal{O}(\Omega)$  pour tout  $\Omega$ . On note encore  $\mathcal{M}$  ce faisceau cohérent sur  $U_d$ . D'après ce que nous venons de voir, si  $u \in U_d(A)$ , alors on a une identification canonique

$$(3.5) \quad u^*(\mathcal{M})(A) = M(u).$$

Considérons alors

$$\eta : \mathcal{S}_d^\square := \text{Spec}_{U_d}^{\text{an}}(\text{Symm } \mathcal{M}^\vee) \rightarrow U_d$$

le spec relatif analytique de la  $\mathcal{O}_{U_d}$ -algèbre quasi-cohérente  $\text{Symm } \mathcal{M}^\vee$  (voir [Con2, §2.2]) : c'est le fibré vectoriel sur  $U_d$  associé à  $\mathcal{M}^\vee$ . Par la propriété universelle de cette construction, pour toute algèbre affinoïde  $A$  et tout  $u \in U_d(A)$ , disons  $u = ([ (D_A, \text{Fil}_\bullet, \nu) ], \delta_d)$ , on a des identifications canoniques

$$\{v \in \mathcal{S}_d^\square(A), \eta(v) = u\} = \text{Hom}_A(u^*(\mathcal{M}^\vee)(A), A) = u^*(\mathcal{M})(A) = H^1(u) \xrightarrow{\sim} \text{Ext}(\mathcal{R}_A(\delta_d), D_A).$$

Cela définit un morphisme de foncteurs  $\mathcal{S}_d^\square \rightarrow F_d^\square$  au dessus de  $U_d$  : on associe à une paire formée d'un élément  $([ (D_A, \text{Fil}_\bullet, \nu) ], \delta_d) \in U_d(A)$  et d'une classe  $E \in \text{Ext}(\mathcal{R}_A(\delta_d), D_A)$ , que l'on voit comme la donnée d'une suite exacte

$$0 \longrightarrow D_A \xrightarrow{\iota} E \xrightarrow{\pi} \mathcal{R}_A(\delta) \longrightarrow 0,$$

la classe du  $(\varphi, \Gamma)$ -module triangulin  $E$  avec  $\text{Fil}_i(E) := \iota(\text{Fil}_i(D_A))$  et  $\nu_i \cdot \iota^{-1} =: \nu_i$  pour  $i \leq d - 1$ , et  $\text{Fil}_d(E) = E$  et  $\nu_d = \pi$ . Il est immédiat que  $\mathcal{S}_d^\square \rightarrow F_d^\square$  est un isomorphisme de foncteurs.  $\square$

Notons  $\mathbb{D}^r$  la boule unité affinoïde fermée de rayon 1 sur  $\mathbb{Q}_p$ , d'algèbre  $\mathbb{Q}_p\langle t_1, \dots, t_r \rangle$ .

**Corollaire 3.5.** *Si  $x \in S_d^\square$ , il existe un voisinage ouvert affinoïde  $U$  de  $x$  dans  $S_d^\square$ , un voisinage ouvert affinoïde  $\Omega$  de  $\delta(x)$  dans  $\mathcal{T}_d^{\text{reg}}$ , et un isomorphisme*

$$\iota : U \xrightarrow{\sim} \Omega \times \mathbb{D}^{\frac{d(d-1)}{2}}$$

tels que  $\text{pr}_2 \cdot \iota = \delta$ .

*Preuve* — Par définition, si  $E$  est un fibré vectoriel sur un espace rigide  $Y$  alors pour tout  $y \in Y$  on peut trouver un voisinage ouvert  $W$  de  $y$  dans  $Y$  tel que  $W \times_Y E \xrightarrow{\sim} W \times \mathbb{A}^m$  comme fibré. Le corollaire découle alors de la construction inductive de  $\mathcal{S}_d^\square$  établie ci-dessus.  $\square$

<sup>18</sup>Voir la note précédente!

**3.6.  $(\varphi, \Gamma)$ -modules triangulins réguliers non rigidifiés.** Bien que ce ne soit pas nécessaire pour le théorème principal de cet article, il est naturel de considérer le foncteur

$$F_d : \text{Aff} \rightarrow \text{Ens}$$

où  $F_d(A)$  est l'ensemble des classes d'équivalence de  $(\varphi, \Gamma)$ -modules triangulins  $(D, \text{Fil}_\bullet(D))$  sur  $\mathcal{R}_A$  dont le paramètre est dans  $\mathcal{T}_d^{\text{reg}}(A)$  (sans rigidification). La notion d'équivalence utilisée ici est celle dans  $(\varphi, \Gamma)/A$  avec préservation de la filtration.

Pour éliminer les auto-équivalences des objets paramétrés par  $F_d$  il est nécessaire de se restreindre à un sous-foncteur adéquat. Si  $L$  est une extension finie de  $\mathbb{Q}_p$  et si  $(D, \text{Fil}_\bullet(D))$  est un  $(\varphi, \Gamma)$ -module triangulin sur  $\mathcal{R}_L$ , on dira que  $D$  est *non scindé* si pour tout  $0 \leq i < \text{rg}_{\mathcal{R}_L}(D)$ , l'extension

$$0 \longrightarrow \text{Fil}_i(D) \longrightarrow \text{Fil}_{i+1}(D) \rightarrow \text{Fil}_{i+1}(D)/\text{Fil}_i(D) \longrightarrow 0$$

n'est pas scindée dans  $(\varphi, \Gamma)/L$ . Si  $(D, \text{Fil}_\bullet(D))$  est un  $(\varphi, \Gamma)$ -module triangulin sur  $\mathcal{R}_A$ , on dira que  $D$  est *partout non scindé* si pour tout  $x \in \text{Sp}(A)$ ,  $(D_x, \text{Fil}_\bullet(D)_x)$  est non scindée. Si un  $(\varphi, \Gamma)$ -module  $D$  triangulin sur  $\mathcal{R}_A$  est partout non scindé et si  $B$  est une  $A$ -algèbre affinoïde, alors  $D \hat{\otimes}_A B$  est aussi partout non scindé vu comme  $(\varphi, \Gamma)$ -module triangulin sur  $\mathcal{R}_B$ . On dispose donc d'un sous-foncteur

$$F_d^{\text{ns}} \subset F_d$$

paramétrant les  $(\varphi, \Gamma)$ -modules triangulins réguliers partout non scindés, et idem pour  $F_d^{\square, \text{ns}} \subset F_d^{\square}$ . L'oubli de la rigidification définit un morphisme de foncteurs

$$\eta : F_d^{\square} \rightarrow F_d$$

qui est surjectif sur les points. Soit  $G_d = \mathbb{G}_m^d/\mathbb{G}_m$  (plongé diagonalement) vu comme tore rigide analytique sur  $\mathbb{Q}_p$ . On dispose enfin d'une action de  $G_d$  sur  $F_d^{\square}$  agissant sur les rigidifications :  $(a_i) \cdot [(D, \text{Fil}_\bullet(D), (\nu_i))] := [(D, \text{Fil}_\bullet(D), (a_i \cdot \nu_i))]$ . Cette action se factorise bien par  $G$  car si  $a \in A^*$  et  $x$  est un représentant d'une classe de  $F_d^{\square}(A)$  alors  $(a, a, \dots, a) \cdot x$  est équivalent à  $x$  via la multiplication par  $a$ . Elle préserve  $F_d^{\square, \text{ns}}$ .

**Lemme 3.7.** (i) Si  $(D_A, \text{Fil}_\bullet)$  est un  $(\varphi, \Gamma)$ -module triangulin régulier sur  $\mathcal{R}_A$  qui est partout non-scindé, alors ses auto-équivalences sont les homothéties  $A^\times$ .

(ii)  $F_d^{\square, \text{ns}}$  est représenté par un ouvert Zariski de  $F_d^{\square}$ .

(iii) Pour toute algèbre affinoïde  $A$ ,  $G_d(A)$  agit librement sur  $F_d^{\square, \text{ns}}(A)$  et l'application  $\eta(A) : F_d^{\square, \text{ns}}(A)/G_d(A) \longrightarrow F_d^{\text{ns}}(A)$  est bijective.

*Preuve* — Vérifions le (i). Nous allons montrer plus généralement que

$$\text{End}_{(\varphi, \Gamma)_A}((D_A, \text{Fil}_\bullet)) = A.$$

Quitte à remplacer  $A$  par  $A/I$  pour un idéal  $I$  de codimension finie, on peut supposer que  $A$  est artinien d'après le théorème d'intersection de Krull. Dans ce cas, une récurrence sur la longueur de  $A$  permet de supposer que  $A = L$  est un corps. Dans ce cas, on procède par récurrence sur  $d$ . Quand  $d = 1$  cela vient de ce que  $H^0(\mathcal{R}_L) = L$ . Pour  $d \geq 1$ , remarquons que si  $(D, \text{Fil}_\bullet)$  est non scindé, il en va de même de  $(\text{Fil}_{d-1}(D), \text{Fil}_\bullet)$ . Ainsi, un endomorphisme de  $D$  préservant sa filtration agit par une homothétie sur  $\text{Fil}_{d-1}$  et sur le quotient  $D/\text{Fil}_{d-1}$ . Notons qu'il agit par 0 sur ces deux  $(\varphi, \Gamma)$ -modules si et seulement si il provient d'un morphisme  $D/\text{Fil}_{d-1}(D) \rightarrow \text{Fil}_{d-1}(D)$  dans  $(\varphi, \Gamma)/L$ , auquel cas il est en fait nul car si  $\delta_i$  est le paramètre de  $D$  alors  $H^0(\text{Fil}_{d-1}(D)(\delta_d^{-1})) = 0$  par l'hypothèse de régularité. Nous avons donc montré que le morphisme de  $L$ -algèbres

$$\alpha : \text{End}_{(\varphi, \Gamma)/L}((D, \text{Fil}_\bullet)) \longrightarrow \text{End}_{(\varphi, \Gamma)/L}((\text{Fil}_{d-1}(D), \text{Fil}_\bullet)) \times \text{End}(D/\text{Fil}_{d-1}(D)) \xrightarrow{\sim} L \times L$$

est injectif. En particulier, si  $\text{End}_{(\varphi, \Gamma)/L}((D, \text{Fil}_\bullet))$  n'est pas réduit aux homothéties alors  $\alpha$  est bijectif : il existe donc un endomorphisme idempotent de  $D$  valant l'identité sur  $\text{Fil}_{d-1}$

et 0 sur  $D/\text{Fil}_{d-1}$ , ce qui contredit le fait que  $0 \rightarrow \text{Fil}_{d-1}(D) \rightarrow D \rightarrow D/\text{Fil}_{d-1}(D) \rightarrow 0$  est non scindée.

Vérifions le (ii) par récurrence sur  $d$ . Si  $d = 1$ ,  $F_d^{\square, \text{ns}} = F_d^{\square}$  et il n'y a rien à démontrer. En général nous avons vu que  $S_d^{\square}$  est un certain fibré vectoriel de rang  $d - 1$  sur un ouvert  $U_d \subset S_{d-1}^{\square} \times \mathcal{T}$ . Ce point de vue fait apparaître  $F_d^{\square, \text{ns}}$  comme l'ouvert du complémentaire de la section nulle de ce fibré pris au dessus de  $F_{d-1}^{\square, \text{ns}} \times \mathcal{T}$ , d'où le résultat.

Vérifions le (iii). Si  $(a_i)(D, \text{Fil}_{\bullet}, \nu)$  est équivalent à  $(D, \text{Fil}_{\bullet}, \nu)$  alors  $(D, \text{Fil}_{\bullet})$  admet un automorphisme agissant sur chaque  $\text{Fil}_i(D)/\text{Fil}_{i-1}(D)$  par le scalaire  $a_i$ . Comme les seuls automorphismes sont des homothéties par le (i) il vient que tous les  $a_i$  sont égaux : l'action de l'énoncé est libre. Le second point du (iii) vient de ce que les automorphismes dans  $(\varphi, \Gamma)/A$  de  $\mathcal{R}_A(\delta)$  sont les homothéties  $A^\times$ .  $\square$

Nous n'avons pas trouvé de références pour l'existence d'un quotient pour une action libre d'un tore sur un espace analytique. Ceci, combiné au lemme ci-dessus, entraînerait que le faisceau pour la topologie de Tate  $\mathcal{F}_d^{\text{ns}}$  associé à  $F_d^{\text{ns}}$  est représentable. Concrètement,  $\mathcal{F}_d^{\text{ns}}(A)$  est la limite inductive (qui est filtrante injective) sur tous les recouvrements finis de  $\text{Sp}(A)$  par des ouverts affinoïdes  $U_i$  des noyaux des  $\prod_i F_d^{\text{ns}}(\mathcal{O}(U_i)) \rightrightarrows \prod_{i,j} F_d^{\text{ns}}(\mathcal{O}(U_i \cap U_j))$ .

Nous nous contenterons ici de traiter le cas  $d = 2$ , pour lequel le problème se résoud aisément.

**Proposition 3.8.**  *$F_2^{\text{ns}}$  est représenté par  $\mathcal{T}_2^{\text{reg}}$ .*

*Preuve* — En effet, le morphisme paramètre  $F_2^{\text{ns}} \rightarrow \mathcal{T}_2^{\text{reg}}$  est un isomorphisme : si  $\delta = (\delta_1, \delta_2) \in \mathcal{T}_2^{\text{reg}}(A)$  est donné, alors on a vu que  $H^1(\mathcal{R}_A(\delta_1 \delta_2^{-1}))$  est libre de rang 1 sur  $A$ , donc il existe un et un seul élément de  $F_2^{\text{ns}}(A)$  de paramètre  $\delta$ .  $\square$

Il se trouve que dans ce cas nous pouvons décrire aussi ce qui se passe au voisinage des points non réguliers. Pour tout  $i \geq 0$  entier, notons  $F_i, F'_i \subset \mathcal{T}^2$  les fermés définis respectivement par les équations  $\delta_1 \delta_2^{-1} = \chi x^i$  et  $\delta_1 \delta_2^{-1} = x^{-i}$ . Tous ces fermés sont deux à deux disjoints et chaque ouvert affinoïde de  $\mathcal{T}^2$  ne rencontre qu'un nombre fini d'entre eux. On désigne par  $F$  la réunion des  $F_i$  et  $F'$  celle des  $F'_i$  : ce sont encore des fermés de  $\mathcal{T}^2$ , et on a  $\mathcal{T}_2^{\text{reg}} \coprod F \coprod F' = \mathcal{T}^2$ . Soit  $\pi : \tilde{\mathcal{T}}_2 \rightarrow \mathcal{T}^2 \setminus F'$  l'éclaté de  $\mathcal{T}^2 \setminus F'$  le long de  $F$ . Le résultat suivant confirme l'intuition de Colmez dans [Co1] selon laquelle  $\tilde{\mathcal{T}}_2$  est l'espace de module grossier des  $(\varphi, \Gamma)$ -modules triangulins partout non scindés de rang 2 de paramètre dans  $\mathcal{T}^2 \setminus F'$  (sur l'ouvert  $\mathcal{T}_2^{\text{reg}}$  c'est même un espace de module fin par le résultat précédent).

**Proposition 3.9.** *Pour toute extension finie  $L/\mathbb{Q}_p$ , il existe une bijection canonique entre  $\tilde{\mathcal{T}}_2(L)$  et l'ensemble des classes d'isomorphie de  $(\varphi, \Gamma)$ -modules triangulins sur  $\mathcal{R}_L$  qui sont de rang 2, non scindé, et de paramètre dans  $\mathcal{T}^2(L) \setminus F'(L)$ , l'application  $\pi$  donnant le paramètre associé.*

*De plus, il existe un recouvrement affinoïde admissible  $(U_i)$  de  $\tilde{\mathcal{T}}_2$ , et pour chaque  $i$  un  $(\varphi, \Gamma)$ -module triangulin  $D_i$  de rang 2 sur  $\mathcal{R}_{U_i}$  et de paramètre  $\pi|_{U_i}$ , tels que pour toute extension  $L/\mathbb{Q}_p$  finie et tout  $x \in U_i(L)$ ,  $(D_i)_x$  est isomorphe au  $(\varphi, \Gamma)$ -module triangulin sur  $\mathcal{R}_L$  associé à  $x$  par la bijection précédente.*

La première partie du théorème est due à Colmez : c'est son calcul de  $H^1(\mathcal{R}_L(\delta))$  pour l'ouvert  $\mathcal{T}_2^{\text{reg}}$ , combiné à sa formule pour l'invariant  $L$  ([Co3]) au voisinage des points de la forme  $x \mapsto \chi x^i$  avec  $i \geq 1$ . Colmez a aussi démontré une version faible de la seconde partie au voisinage de tout  $x \in \mathcal{T}_2^{\text{reg}}$  qui est de plus  $p$ -régulier au sens que  $\delta_1 \delta_2^{-1}(p) \notin p^{\mathbb{Z}}$ .

*Preuve* — Au dessus de  $\mathcal{T}_2^{\text{reg}}$ , le théorème est un cas particulier de la proposition précédente. Quitte à tordre par une famille de  $(\varphi, \Gamma)$ -modules de rang 1, on peut donc supposer que l'on se place dans un voisinage ouvert affinoïde  $U \subset \mathcal{T}$  contenant un unique point  $u \in U(\mathbb{Q}_p)$  tel que  $\delta(u) = \chi x^i$  est non régulier, et que l'on s'intéresse à l'éclaté  $\pi : \tilde{U} \rightarrow U$  en  $u$ . Dans ce cas, on dispose d'une identification naturelle donnée par le théorème 2.33

$$\mu : \pi^{-1}(u) \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}(H^1(\mathcal{R}_{\mathbb{Q}_p}(\chi x^i))).$$

Ce théorème assure aussi que  $H^1(\mathcal{R}_U(\delta_U))$  est canoniquement isomorphe à  $\mathcal{O}(U)$ , et que si  $m \subset \mathcal{O}(U)$  désigne l'idéal des fonctions s'annulant en  $u$ , alors l'inclusion induit une égalité

$$H^1(m\mathcal{R}_U(\delta_U)) = H^1(\mathcal{R}_U(\delta_U)) = \mathcal{O}(U).$$

Soit  $D_U = m\mathcal{R}_U \oplus \mathcal{R}_U$  un  $(\varphi, \Gamma)$ -module sur  $\mathcal{R}_U$  dont la classe dans  $H^1(m\mathcal{R}_U(\delta_U))$  en est un  $\mathcal{O}(U)$ -générateur. Soit  $U_i$  un recouvrement fini de  $\tilde{U}$  par des ouverts affinoïdes sur chacun desquels  $m\mathcal{O}(U_i) \subset \mathcal{O}(U_i)$  est libre de rang 1, disons engendré par l'élément  $f_i$ . Le transformé strict de  $D_U$  sur  $\mathcal{R}_{U_i}$ , qui est aussi le quotient de  $D_U \otimes_{\mathcal{R}_U} \mathcal{R}_{U_i}$  par sa  $f_i$ -torsion, est un  $(\varphi, \Gamma)$ -module sur  $\mathcal{R}_{U_i}$  de  $\mathcal{R}_{U_i}$ -module sous-jacent  $m\mathcal{R}_{U_i} \oplus \mathcal{R}_{U_i} = f_i\mathcal{R}_{U_i} \oplus \mathcal{R}_{U_i}$  : il est bien libre de rang 2. Par construction de l'éclaté, le choix d'un  $z \in (\pi^{-1}(u) \cap U_i)(L)$  définit un  $\mathcal{O}(U)$ -morphisme surjectif

$$(m/m^2) \otimes_{\mathbb{Q}_p} L \rightarrow f_i\mathcal{O}(U_i) \otimes_{\mathcal{O}(U_i)} L,$$

soit encore à un vecteur tangent  $v_z \in T_u \otimes_{\mathbb{Q}_p} L$ , tout vecteur tangent s'obtenant ainsi pour un certain  $i$ . Un tel choix définit donc un  $\mathcal{O}(U)$ -morphisme surjectif

$$D_U \otimes_{\mathcal{O}(U)} L \rightarrow (D_i)_z.$$

La preuve du (ii) du théorème 2.33 dit exactement que l'image de ce morphisme a pour classe dans  $H^1(\mathcal{R}_L(\chi x^{-i}))$  l'élément  $\mu(v_z)$  associé à l'isomorphisme  $\mu(L) : \mathbb{P}(T_u)(L) \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}(H^1(\mathcal{R}_L(\chi x^i)))$ .  $\square$

**Remarque 3.10.** *La situation est différente au voisinage des points dans  $F'$ . En effet, négligeons les torsions en nous plaçant dans un voisinage ouvert affinoïde  $U \subset \mathcal{T}$  du point  $\delta = x^{-i}$ . D'après le théorème 2.33, pour tout élément  $E \in H^1(\mathcal{R}(\delta))$  on peut trouver un  $(\varphi, \Gamma)$ -module triangulin  $D$  sur  $\mathcal{R}_U$  de paramètre  $(\delta_U, 1)$  tel que pour tout  $z \in \mathcal{T}^{\text{reg}} \cap U$  son évaluation  $D_z$  est non scindée, et dont l'évaluation en  $\delta$  est exactement  $E$ . On pourrait penser aller plus loin en introduisant ici aussi l'éclaté de  $U$  en  $\delta$ . Il n'y cependant pas de manière naturelle de construire de famille de  $(\varphi, \Gamma)$ -modules sur cet éclaté. Disons simplement qu'un indice de ceci est que le théorème 2.33 identifie canoniquement  $T_\delta$  avec le dual de l'espace vectoriel  $H^1(\mathcal{R}_{\mathbb{Q}_p}(x^{-i}))$ , plutôt qu'avec ce dernier.*

Ainsi qu'il l'est expliqué dans [BeCh], notons que la proposition 3.9 entraîne la :

**Proposition 3.11.** *La conjecture 5.1 de [BeCh] est vraie : les représentations potentiellement triangulines de dimension 2 forment une partie fine de la variété des caractères  $p$ -adiques de dimension 2 de  $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ .*

Terminons ce paragraphe par une comparaison entre les foncteurs définis ici et les "foncteurs de déformations triangulines" considérés dans [BCh, §2.5] et [Ch3, §3]. Soit  $F : \text{Aff} \rightarrow \text{Ens}$  un foncteur quelconque,  $L/\mathbb{Q}_p$  une extension finie et  $x \in F(L)$ . Soit  $\mathcal{C}$  la catégorie des  $L$ -algèbres locales artiniennes de corps résiduel  $L$  : c'est une sous-catégorie pleine de celle des affinoïdes sur  $L$ . Le *complété formel* de  $F$  en  $x$  est le foncteur  $\widehat{F}_x : \mathcal{C} \rightarrow \text{Ens}$  défini comme suit : pour tout objet  $A$  de  $\mathcal{C}$ ,  $\widehat{F}_x(A) \subset F(A)$  est le sous-ensemble des éléments dont l'image dans  $F(L)$  par l'unique morphisme  $A \rightarrow L$  est l'élément  $x$  (c'est donc un sous-foncteur de  $F|_{\mathcal{C}}$ ). Quand  $F$  est représenté par un espace analytique  $Z$  sur  $\mathbb{Q}_p$ ,  $\widehat{F}_x$  est pro-représenté par  $\widehat{\mathcal{O}_{Z,x}} \otimes_{k(x)} L$ .



**Lemme 3.12.** *Soit  $x = [(D, \text{Fil}_\bullet)] \in F_d(L)$ . Si  $D$  est non-scindé, et plus généralement si  $\text{End}_{(\varphi, \Gamma)/L}((D, \text{Fil}_\bullet)) = L$ , alors  $(\widehat{F_d})_x$  est canoniquement isomorphe au foncteur des déformations triangulines de  $(D, \text{Fil}_\bullet)$  au sens de [BCh, §2.5]. De plus,  $(\widehat{F_d})_x$  est pro-représentable.*

*Preuve* — En effet, le foncteur  $\mathfrak{X}_{D, \text{Fil}_\bullet}$  des déformations triangulines de  $(D, \text{Fil}_\bullet)$  défini loc. cit. paramètre les classes d'isomorphismes de triplets  $(D_A, \text{Fil}_\bullet, \pi)$  où  $\pi : D_A \otimes_A L \rightarrow D$  est un isomorphisme dans  $(\varphi, \Gamma)/A$  envoyant  $\text{Fil}_i(D_A)$  sur  $\text{Fil}_i(D)$ . L'association  $(D_A, \text{Fil}_\bullet, \pi) \mapsto [(D_A, \text{Fil}_\bullet)]$  définit un morphisme de foncteurs  $\mathfrak{X}_{D, \text{Fil}_\bullet} \rightarrow (\widehat{F_d})_x$  qui est surjectif sur les points. Pour l'injectivité, il faut remarquer que si  $\text{Aut}_{(\varphi, \Gamma)/L}((D, \text{Fil}_\bullet)) = L^\times$  (les homothéties), alors pour tout  $(D_A, \text{Fil}_\bullet)$  dont la classe est dans  $(\widehat{F_d})_x$ , alors l'application naturelle

$$\text{Aut}_{(\varphi, \Gamma)/A}(D_A, \text{Fil}_\bullet) \rightarrow \text{Aut}_{(\varphi, \Gamma)/L}(D, \text{Fil}_\bullet)$$

est surjective, car le terme de gauche contient  $A^\times$ . L'assertion de pro-représentabilité est [Ch3, Prop. 3.4].  $\square$

**3.13. Densité des  $(\varphi, \Gamma)$ -modules cristallins dans  $S_d^\square$ .** Si  $L$  est une extension finie de  $\mathbb{Q}_p$  et  $D$  un  $(\varphi, \Gamma)$ -module sur  $\mathcal{R}_L$ , on dit que  $D$  est *cristallin* si le  $L$ -espace vectoriel

$$\mathcal{D}_{\text{cris}}(D) := (D[1/t])^\Gamma$$

est de dimension  $\text{rg}_{\mathcal{R}_L}(D)$ . Nous renvoyons à [BCh, §2.2.7] pour une discussion de cette définition, principalement motivée par des travaux de Berger : si  $D$  est étale alors il est cristallin si et seulement si sa représentation galoisienne  $V$  associée l'est, auquel cas  $\mathcal{D}_{\text{cris}}(D)$  est canoniquement isomorphe à  $\mathcal{D}_{\text{cris}}(V)$  comme  $L[\varphi]$ -module filtré (nous ne donnerons pas ici la recette de la filtration naturelle sur  $\mathcal{D}_{\text{cris}}(D)$ ). Bien entendu, un point  $x \in S_d^\square(L)$  est dit cristallin si le  $(\varphi, \Gamma)$ -module triangulin  $D_x$  sur  $\mathcal{R}_L$  qui lui est associé l'est. Dans ce cas, le paramètre  $(\delta_i)$  de  $D_x$  est *algébrique* : pour tout  $i$ , il existe  $k_i \in \mathbb{Z}$  tel que  $\delta_i(\gamma) = \gamma^{k_i}$  pour tout  $\gamma \in \Gamma$  (voir par exemple [BCh, prop. 2.4.1]).

On rappelle qu'une partie  $A$  d'un espace rigide  $Y$  est dite Zariski-dense si le seul fermé analytique global réduit de  $Y$  contenant  $A$  est la nilréduction de  $Y$ . Si  $Y$  est affinoïde il est équivalent de demander que  $A$  est Zariski-dense dans  $\text{Spec}(\mathcal{O}(Y))$ . On dit de plus que la partie  $A$  s'accumule en une partie  $B \subset Y$  si tout élément de  $B$  admet une base de voisinages ouverts affinoïdes  $U_i$  tels que  $A \cap U_i$  est Zariski-dense dans  $U_i$ . On dit que  $A$  est d'accumulation si  $A$  s'accumule en  $A$ . On étend ces définitions à des parties de  $Y(\overline{\mathbb{Q}_p}) := \bigcup_L Y(L)$  (la réunion portant sur les sous-extensions finies) en considérant l'ensemble des points fermés sous-jacents. Comme exemple typique, remarquons que  $\mathbb{N}^d$  est Zariski-dense et d'accumulation dans  $\mathbb{A}^d$ .

Nous renvoyons à [Con1] pour les généralités sur les composantes irréductibles des espaces rigides analytiques  $p$ -adiques.

**Théorème 3.14.** *Pour chaque extension finie  $L/\mathbb{Q}_p$ , l'ensemble des points cristallins de  $S_d^\square(L)$  est Zariski-dense et s'accumule en chaque point de  $S_d^\square(L)$  de paramètre algébrique.*

*Preuve* — Remarquons que  $\mathcal{T}_d^{\text{reg}}$  est irréductible, comme ouvert Zariski de l'espace irréductible  $\mathcal{T}^d$ . Comme un fibré vectoriel sur une base irréductible lisse est irréductible lisse,  $S_d^\square$  est irréductible lisse par construction. Pour démontrer la densité Zariski de  $S_d^\square(\mathbb{Q}_p)$ , il suffit donc de démontrer qu'il est non vide ainsi que la propriété d'accumulation.

Soit  $L$  une extension finie de  $\mathbb{Q}_p$ . Considérons  $A_d(L) \subset \mathcal{T}_d^{\text{reg}}(L)$  l'ensemble des points paramétrant les  $(\delta_i) \in \mathcal{T}(L)^d$  tels que :

- (a)  $\delta_i(p)/\delta_j(p) \neq p^{\pm 1}$  pour tout  $i < j$ ,
- (b) il existe une suite d'entiers  $k_i \in \mathbb{Z}$  vérifiant :  $\delta_i(\gamma) = \gamma^{-k_i}$  pour tout  $\gamma \in \Gamma$  et tout  $i = 1, \dots, d$ ,
- (c) la suite  $k_i$  est strictement croissante :  $k_1 < k_2 < \dots < k_d$ .

On note aussi  $B_d(L) \subset \mathcal{T}_d^{\text{reg}}(L)$  l'ensemble des points satisfaisant uniquement la condition (b), c'est à dire les paramètres algébriques. Il est évident que  $A_d(L)$  est non-vide, que  $A_d(L) \subset B_d(L)$ , et que  $A_d(L)$  s'accumule en  $B_d(L)$  dans  $\mathcal{T}_d^{\text{reg}}$ .

**Lemme 3.15.** *Un  $(\varphi, \Gamma)$ -module triangulin sur  $\mathcal{R}_L$  qui a son paramètre dans  $A_d(L)$  est cristallin.*

*Preuve* — C'est un cas particulier de [BCh, Prop. 2.3.4], largement précisée dans [Ben], qui repose de manière essentielle sur des résultats de Berger [Be1] [Be2]. En effet, si  $D$  est comme dans l'énoncé alors il est de De Rham par cette proposition (à cause de la condition (c)), et donc potentiellement semi-stable par le théorème de Berger. Comme  $D$  est extension successive de  $(\varphi, \Gamma)$ -modules cristallins par hypothèse, et comme la formation du  $\mathcal{D}_{\text{pst}}$  est exacte sur les  $(\varphi, \Gamma)$ -modules potentiellement semi-stables d'après [Ben, Prop. 1.2.9], il vient que  $D$  est semi-stable. La condition (a) force alors  $D$  à être cristallin.  $\square$

Retournons à la preuve du théorème 3.14. Supposons donc  $x \in S_d^{\square}(L)$  cristallin, ou plus généralement tel que  $\delta(x) \in B_d(L)$ . Soit  $U$  un voisinage ouvert affinoïde de  $x$  dans  $S_d^{\square}$ , ainsi que  $\Omega$  et  $\iota$ , comme dans le corollaire 3.5. Soit  $(\Omega_i)_{i \in I}$  une base de voisinages ouverts affinoïdes de  $\delta(x)$  dans  $\mathcal{T}_d^{\text{reg}}$  dans lesquels  $A_d(L)$  est Zariski-dense. Quand  $i$  parcourt  $I$  et  $V$  les ouverts affinoïdes de  $\mathbb{D}^{\frac{d(d-1)}{2}}$ , les  $U_{i,V} := \iota^{-1}(\Omega_i \times V)$  forment une base de voisinages ouverts affinoïdes de  $x$  dans  $S_d^{\square}$ . Comme  $A_d(L)$  est Zariski-dense dans chaque  $\Omega_i$ , il en va de même de<sup>19</sup>  $\iota^{-1}((A_d(L) \cap \Omega_i) \times V)$  dans  $U_{i,V}$ , qui est constitué de points cristallins d'après le lemme 3.15.  $\square$

**3.16. La famille de représentations galoisiennes sur le lieu étale.** Pour terminer ce chapitre, considérons le *sous-ensemble*

$$S_d^{\square,0} \subset S_d^{\square}$$

constitué des points  $x \in S_d^{\square}$  tels que le  $(\varphi, \Gamma)$ -module  $D_x$  sur  $\mathcal{R}_{k(x)}$  associé est étale. Si  $x \in S_d^{\square,0}$  on désigne par  $V_x$  la représentation de  $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$  telle que  $D_{\text{rig}}(V_x) \simeq D_x$ .

**Proposition 3.17.** *Pour chaque  $x \in S_d^{\square}$ , il existe un voisinage ouvert affinoïde  $\Omega$  de  $x$  dans  $S_d^{\square}$ , un modèle  $\mathcal{A} \subset \mathcal{O}(\Omega)$ , et un  $\mathcal{A}$ -module libre  $M$  de rang  $d$  muni d'une application  $\mathcal{A}$ -linéaire continue de  $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$  tels que :*

- (i)  $\Omega \subset S_d^{\square,0}$ ,
- (ii) *pour tout morphisme  $Z \rightarrow \Omega$  avec  $Z$  affinoïde, le  $(\varphi, \Gamma)$ -module  $D_{\text{rig}}(M \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{O}(Z))$  sur  $\mathcal{R}_Z$  défini par Berger et Colmez est isomorphe au  $(\varphi, \Gamma)$ -module triangulin rigidifié universel déduit du morphisme donné  $Z \rightarrow S_d^{\square}$ .*

*Le  $\mathcal{O}(\Omega)[\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)]$ -module  $M \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{O}(\Omega)$  est unique à isomorphisme près pour la propriété (ii).*

<sup>19</sup>Il est immédiat de vérifier que si  $U$  et  $V$  sont des affinoïdes, et si  $A \subset U$  et  $B \subset V$  des parties Zariski-denses, alors  $A \times B$  est Zariski-dense dans  $U \times V$ .

*Preuve* — L'existence de  $\mathcal{A}$  et  $M$  satisfaisant (i) et (ii) pour  $Z = \Omega$ , ainsi que l'assertion d'unicité, est un cas particulier du théorème [KeL, Thm. 0.2] de Kedlaya-Liu appliqué à la famille universelle de  $(\varphi, \Gamma)$ -modules sur  $S_d^\square$ . Vérifions le (ii) pour  $Z \rightarrow \Omega$  quelconque. Il s'agit de voir qu'avec la définition du  $D_{\text{rig}}$  d'une famille de Berger-Colmez l'application naturelle

$$(3.6) \quad D_{\text{rig}}(M \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{O}(\Omega)) \otimes_{\mathcal{R}_\Omega} \mathcal{R}_Z \rightarrow D_{\text{rig}}(M \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{O}(Z))$$

est un isomorphisme. Le terme de droite a bien un sens car la représentation  $M \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{O}(Z)$  admet un  $\mathcal{B}$ -réseau libre stable pour tout modèle  $\mathcal{B}$  de  $\mathcal{O}(Z)$  contenant l'image de  $\mathcal{A}$  (de tels modèles existent et on en fixe un). L'isomorphisme ci-dessus découle alors de l'assertion d'unicité de la proposition [BeCo, prop. 4.2.8] comme dans la preuve de leur théorème 4.2.9. : les détails sont sans difficulté et laissés au lecteur.  $\square$

En particulier,  $S_d^{\square,0} \subset S_d^\square$  est un ouvert pour la topologie naïve. Notons qu'à priori, ce résultat ne confère pas à  $S_d^{\square,0}$  de structure naturelle d'espace rigide analytique. (On pourrait cependant choisir une écriture de  $S_d^{\square,0}$  comme réunion disjointe d'ouverts affinoïdes  $\mathcal{U} = \{\Omega_i, i \in I\}$  de  $S_d^\square$ , ce qui est loisible (et l'on peut même demander que chaque  $\Omega_i$  satisfasse les conclusions de la proposition 3.17), et décréter que  $\mathcal{U}$  est un recouvrement admissible de  $S_d^{\square,0}$ . Pour chaque telle structure l'inclusion  $S_d^{\square,0} \rightarrow S_d^\square$  est une immersion ouverte.) On a en revanche une notion canonique de fonction *localement analytique*  $f : S_d^{\square,0} \rightarrow Y$  vers un espace analytique  $Y$  quelconque : nous entendrons par là une application telle que pour chaque  $x \in S_d^{\square,0}$  la restriction de  $f$  à un voisinage affinoïde suffisamment petit de  $x$  est une fonction rigide analytique (noter que  $S_d^\square$  est réduit). Il résulte de la proposition ci-dessus que les applications  $x \mapsto \text{trace}(g|V_x)$ , pour  $g \in \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ , sont localement analytiques sur  $S_d^{\square,0}$ , et simultanément analytiques sur un voisinage de chaque  $x$ , ce qui implique le :

**Corollaire 3.18.** *Soit  $\mathcal{X}_d$  la variété des caractères  $p$ -adiques de dimension  $d$  de  $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ . Il existe une unique application localement analytique*

$$f : S_d^{\square,0} \rightarrow \mathcal{X}_d$$

*associant à tout  $x \in S_d^{\square,0}$  la semi-simplification de la représentation  $V_x$ .*

L'image de cette application est la fougère infinie régulière. Nous renvoyons à [Ch2] pour la définition de  $\mathcal{X}_d$ . Pour le lecteur peu familier avec cette théorie, donnons une version plus concrète concernant la  $\bar{\rho}$ -composante connexe  $\mathcal{X}_d(\bar{\rho}) \simeq X \subset \mathcal{X}_d$  où  $\bar{\rho}$  est fixée comme dans l'introduction (sans supposer nécessairement  $\bar{\rho} \not\sim \bar{\rho}(1)$ ). Pour cela nous allons définir indépendamment l'ensemble

$$S_d^\square(\bar{\rho}) \subset S_d^{\square,0}$$

pull-back par l'application  $f$  du corollaire ci-dessus de l'ouvert  $\mathfrak{X}_d(\bar{\rho}) \subset \mathfrak{X}_d$ . Cela nous oblige à quelques sorites et rappels préliminaires sur la notion de *représentation résiduelle associée à une famille de représentations* et sur la propriété universelle de  $X$  (qui rappelons-le est défini comme l'espace analytique associé par Berthelot à la fibre générique de l'anneau de déformation universelle de  $\bar{\rho}$ ). Nous renvoyons à [Ch2, §3] pour plus de détails.

Si  $Y$  est un affinoïde, une *famille de représentations* de  $G := \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$  paramétrée par  $Y$  est la donnée d'un  $\mathcal{O}(Y)$ -module libre de rang fini muni d'une action  $\mathcal{O}(Y)$ -linéaire continue de  $G$ . Pour  $y \in Y$ , on note  $M_y := M \otimes_{\mathcal{O}(Y)} k(y)$  l'évaluation de  $M$  en  $y$  et  $\overline{M}_y$  la semi-simplifié de la réduction modulo  $\pi_{k(y)}$  d'un  $\mathcal{O}_{k(y)}$ -réseau stable par  $G$  dans  $M_y$  (elle est donc à coefficients dans le corps fini  $k_y$  résiduel de  $k(y)$ ). Si  $Y$  est connexe, on peut montrer ([Ch2, Def. 3.11]) qu'il existe une représentation semi-simple continue  $r : G \rightarrow \text{GL}_m(\overline{\mathbb{F}_p})$ , et un morphisme d'algèbres  $W(\mathbb{F}) \rightarrow \mathcal{O}(Y)$  où  $\mathbb{F} \subset \overline{\mathbb{F}_p}$  désigne le corps

(fini) engendré par les coefficients des polynômes caractéristiques des  $r(g)$  pour  $g \in G$ , tels que pour tout  $y \in Y$  alors

$$\forall g \in G, \det(1 - Tg|\overline{M}_y) = \det(1 - Tr(g)) \in \mathbb{F}[T].$$

Cette identité a un sens car  $\mathbb{F} \subset k_y$  pour tout  $y$ . Notons que modifier le plongement  $W(\mathbb{F}) \rightarrow \mathcal{O}(Y)$  par le Frobenius de  $W(\mathbb{F})$  revient à appliquer à  $r$  le Frobenius sur les coefficients (ou son inverse). À cette indétermination près, un résultat standard dû à Brauer-Nesbitt implique que la classe d'isomorphisme de  $r$  est uniquement déterminée par  $M$ . On dit alors que  $r$  est la représentation résiduelle de  $M$ . C'est un fait relativement formel mais important que *l'espace analytique  $X$  sur  $\mathbb{Q}_p$  (oubliant la  $F$ -structure) représente le foncteur de la catégorie des affinoïdes vers les ensembles associant à  $Y$  l'ensemble des classes de  $\mathcal{O}(Y)[G]$ -isomorphie de familles de représentations de  $G$  paramétrées par  $Y$  dont la représentation résiduelle est  $\bar{\rho}$  ([Ch2, §3]).*

Si  $r : G \rightarrow \mathrm{GL}_d(\overline{\mathbb{F}}_p)$  est une représentation semi-simple continue quelconque, on définit enfin

$$S_d^\square(r) \subset S_d^{\square,0}$$

comme l'ensemble des  $x \in S_d^{\square,0}$  tels que  $V_x$  a pour réduction  $r$ .

**Corollaire 3.19.** (et scholie) *Pour tout  $r$ ,  $S_d^\square(r)$  est un ouvert naïf<sup>20</sup> de  $S_d^\square$ . Si  $r = \bar{\rho}$  et  $X$  sont comme dans l'introduction<sup>21</sup>, il existe une unique application localement analytique*

$$f : S_d^\square(\bar{\rho}) \rightarrow X$$

*associant à tout  $x \in S_d^\square(\bar{\rho})$  la représentation  $V_x$ . Plus précisément, elle a la propriété que pour tout  $x \in S_d^\square(\bar{\rho})$ , il existe  $\Omega \subset S_d^\square(\bar{\rho})$  un voisinage ouvert affinoïde assez petit de  $x$  dans  $S_d^\square$  tel que :*

- (i)  *$f$  est analytique sur  $\Omega$ ,*
- (ii) *Pour tout morphisme  $Z \rightarrow \Omega$  avec  $Z$  affinoïde, le  $(\varphi, \Gamma)$ -module associé par Berger-Colmez à la famille déduite du morphisme  $f : \Omega \rightarrow X$  soit isomorphe au  $(\varphi, \Gamma)$ -module associé au morphisme  $Z \rightarrow S_d^\square$  par la propriété universelle de ce dernier.*

*Preuve* — En effet, le premier point résulte de la discussion ci-dessus et de la proposition 3.17 en considérant la composante connexe  $\Omega_x$  contenant  $x$  du  $\Omega$  donné par la proposition. La propriété universelle de  $X$  définit alors un unique morphisme analytique  $\Omega_x \rightarrow X$  qui n'est autre que l'application de l'énoncé au niveau des points et le corollaire tout entier résulte de la proposition 3.17 (ii).  $\square$

**Remarque 3.20.** *Par définition,  $S_d^{\square,0}$  est la réunion disjointe des  $S_d^\square(r)$  sur l'ensemble des  $r : G \rightarrow \mathrm{GL}_d(\overline{\mathbb{F}}_p)$  semi-simples continus considérés modulo isomorphisme et action du Frobenius sur les coefficients. En fait,  $S_d^\square(r)$  est non vide pour tout  $r$  : quand  $r$  est irréductible cela découle de la proposition 4.3 (i) ci-dessous, le cas général s'en déduit en considérant des sommes directes. On verra même plus tard que  $S_d^\square(r)$  contient des points cristallins absolument irréductibles.*

#### 4. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME A

Reprenons les notations de l'introduction.

<sup>20</sup>C'est à dire une réunion quelconque d'ouverts affinoïdes.

<sup>21</sup>Avec éventuellement  $\bar{\rho} \simeq \bar{\rho}(1)$ .

**4.1. Premières réductions.** Commençons la démonstration du théorème A. Si  $L$  est une extension finie de  $\mathbb{Q}_p$  et si  $V$  est une  $L$ -représentation cristalline de  $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ , on dira que  $V$  est *générique* si les conditions suivantes sont satisfaites ([Ch3, §3.18]) :

- (G1)  $V$  a  $d := \dim_L(V)$  poids de Hodge-Tate<sup>22</sup> distincts.
- (G2) Les valeurs propres  $\varphi_1, \dots, \varphi_d$  du Frobenius cristallin de  $D_{\text{cris}}(V)$  dans  $\overline{L}$  satisfont  $\varphi_i \varphi_j^{-1} \notin p^{\mathbb{Z}}$  pour tout  $i \neq j$ .
- (G3) Si  $S \subset D_{\text{cris}}(V)$  est un sous- $L$ -espace vectoriel  $\varphi$ -stable, alors  $S$  est en somme directe avec le sous-espace de la filtration de Hodge de  $D_{\text{cris}}(V)$  dont la dimension est  $d - \dim_L(S)$ .

On dira aussi que  $V$  est *déployée sur  $L$*  si les valeurs propres du Frobenius cristallin de  $D_{\text{cris}}(V)$  dans  $\overline{L}$  sont toutes dans  $L$ .

L'ingrédient principal de la démonstration est alors le suivant. Notons  $T_y(Y)$  l'espace tangent de Zariski au point  $y$  de l'espace rigide  $Y$  (c'est un espace vectoriel de dimension finie sur le corps résiduel  $k(y)$ ). Pour une extension finie  $L$  de  $\mathbb{Q}_p$ , on note aussi  $T_y(Y)$  l'espace  $T_{|y|}(Y) \otimes_{k(y)} L$ ,  $|y| \in Y$  désignant le point fermé sous-jacent à  $y$  et  $k(y) \rightarrow L$  l'application structurale de  $y$ .

**Proposition 4.2.** *Soient  $x \in X(L)$  cristallin générique déployé sur  $L$ ,  $U \subset X$  un voisinage ouvert affinoïde de  $x$  dans  $X$ , et  $W \subset U$  l'adhérence Zariski des points cristallins de  $U(L)$ . Alors  $\dim_L T_x(W) = d^2 + 1$ .*

Nous reportons la preuve de cette proposition au § 4.5. Le second ingrédient est le suivant.

- Proposition 4.3.**
- (i) *Il existe une extension  $L/F$  de degré  $\leq d^2$  telle que  $X(L)$  contienne des points cristallins déployés sur  $L$  et dont tous les poids de Hodge-Tate sont distincts.*
  - (ii) *Si  $x \in X(L)$  est cristallin déployé sur  $L$ , et si  $\Omega \subset X$  est un ouvert affinoïde contenant  $x$ , alors  $\Omega(L)$  contient un point cristallin générique et déployé sur  $L$ .*

*Preuve* — Montrons le (i). Il est bien connu que si  $F_d = W(\mathbb{F}_{p^d})[1/p]$  est l'extension non ramifiée de degré  $d$  de  $\mathbb{Q}_p$ , il existe un caractère continu  $\eta : G_{F_d} \rightarrow \overline{\mathbb{F}_p}^*$  tel que

$$\bar{\rho} \simeq \text{Ind}_{G_{F_d}}^{G_{\mathbb{Q}_p}} \eta,$$

par irréductibilité absolue de  $\bar{\rho}$ . Soit  $\Sigma := \text{Hom}_{\text{corps}}(\mathbb{F}_{p^d}, \overline{\mathbb{F}_p})$ , cet ensemble à  $d$  éléments s'identifie canoniquement par réduction modulo  $p$  à  $\text{Hom}_{\text{corps}}(F_d, W(\overline{\mathbb{F}_p})[1/p]) = \text{Hom}_{\text{ann}}(\mathcal{O}_{F_d}, W(\overline{\mathbb{F}_p}))$ . Si  $\text{rec} : \widehat{F_d^*} \rightarrow G_{F_d}^{\text{ab}}$  est l'isomorphisme du corps de classe local, alors  $\eta \circ \text{rec}$  est nécessairement (1) trivial sur  $1 + p\mathcal{O}_{F_d}$ , (2) de la forme  $x \mapsto \prod_{\sigma \in \Sigma} \sigma(x)^{a_\sigma}$  pour certains entiers uniques  $a_\sigma \in \{0, 1, \dots, p-1\}$  sur  $\mathcal{O}_{F_d}^*$ , et (3) envoie  $p$  sur un certain élément  $\bar{\lambda} \in \overline{\mathbb{F}_p}^*$ . Notons aussi que

$$\det(X - \bar{\rho}|_{G_{F_d}^{\text{ab}}}(p)) = (X - \bar{\lambda})^d \in \mathbb{F}[X]$$

assure que  $\bar{\lambda} \in \mathbb{F}$ .

Il vient que pour toute collection d'entiers  $\{b_\sigma, \sigma \in \Sigma\}$  telle que  $b_\sigma \equiv a_\sigma \pmod{p}$  pour tout  $\sigma$ , et pour tout  $\lambda \in \mathcal{O}_F^*$  tel que  $\bar{\lambda} \equiv \lambda \pmod{p}$ , le caractère  $\tilde{\eta} : G_{F_d} \rightarrow (F_d \cdot F)^*$  défini

<sup>22</sup>Il s'agit ici de poids de Hodge-Tate relativement à  $L$ , c'est à dire les racines du polynôme de Sen vu comme élément de  $L[T]$ .

par la formule

$$\forall u \in \mathcal{O}_{F_d}^*, \tilde{\eta} \circ \text{rec}(pu) = \lambda \prod_{\sigma \in \Sigma} \sigma(u)^{b_\sigma}$$

relève  $\eta$ , et donc que  $V := \text{Ind}_{G_{F_d}}^{G_{\mathbb{Q}_p}} \tilde{\eta}$  relève  $\bar{\rho}$ . Enfin,  $V$  est cristalline car  $F_d$  est non ramifiée et  $\eta$  est cristallin d'après un résultat de Fontaine : les poids de Hodge-Tate de  $V$  sont les  $b_\sigma$  et le polynôme caractéristique du Frobenius cristallin sur  $D_{\text{cris}}(V)$  est  $X^d - \lambda p^{\sum_\sigma a_\sigma}$ . Le (i) s'en déduit.

Le (ii) est une conséquence des résultats de Kisin dans [K2, §3], expliquons comment. Soit  $x \in X(L)$  un point cristallin à poids de Hodge-Tate distincts  $\mathbf{k} = (k_1 < \dots < k_d)$ . Si  $V_R$  désigne la déformation universelle de  $\bar{\rho}$  (l'anneau  $R$  étant comme dans l'introduction), Kisin démontre l'existence d'un quotient

$$R[1/p] \rightarrow R_{\mathbf{k}}$$

dont les points dans toute  $F$ -algèbre de dimension finie  $B$  paramètrent exactement les morphismes  $R[1/p] \rightarrow B$  tels que  $V_R \otimes_R B$  est cristalline de poids de Hodge-Tate  $k_1 < \dots < k_d$  ([K2, Thm. 2.5.5]). Notons  $X_{\mathbf{k}} \subset X$  le fermé analytique de  $X$  défini par l'idéal noyau de  $R[1/p] \rightarrow R_{\mathbf{k}}$ . D'après Kisin [K2, Thm. 3.3.4],  $X_{\mathbf{k}}$  est lisse de dimension  $\frac{d(d-1)}{2} + 1$ . Rappelons que c'est un fait général que l'application naturelle  $R_{\mathbf{k}} \rightarrow \mathcal{O}(X_{\mathbf{k}})$  induit une bijection  $\psi : X_{\mathbf{k}} \rightarrow \text{Specmax}(R_{\mathbf{k}})$  et des isomorphismes  $\widehat{(R_{\mathbf{k}})}_{\psi(x)} \rightarrow \mathcal{O}_{X_{\mathbf{k}},x}$  sur les anneaux locaux complétés pour tout  $x \in X_{\mathbf{k}}$ . Le (ii) découle du lemme suivant.  $\square$

**Lemme 4.4.** *L'ensemble des points  $x \in X_{\mathbf{k}}(L)$  tels que  $\rho_x$  est générique est dense dans  $X_{\mathbf{k}}(L)$ . De plus, si  $x \in X_{\mathbf{k}}(L)$  est déployé sur  $L$ , il existe un ouvert affinoïde  $O$  de  $x$  dans  $X_{\mathbf{k}}$  tel que  $O(L)$  est constitué de points déployés sur  $L$ .*

*Preuve* — En effet, Kisin démontre *loc. cit.* l'existence d'un  $\varphi$ -module filtré  $D$  localement libre de rang  $d$  sur  $R_{\mathbf{k}}$  tel que pour tout quotient artinien  $R_{\mathbf{k}} \rightarrow B$ ,  $D_{\text{cris}}(V_R \otimes_R B)$  est isomorphe à  $D \otimes_{R_{\mathbf{k}}} B$ , ce qui détermine donc  $V_B$  par l'équivalence de Fontaine.

Soient  $P_\varphi \in R_{\mathbf{k}}[T]$  le polynôme caractéristique de  $\varphi$  sur  $D$  et  $\mathcal{F}$  la variété des drapeaux complets de  $F^d$ , disons vue comme variété  $F$ -analytique. Remarquons déjà que l'existence même de  $P_\varphi$ , ainsi que le lemme de Krasner, impliquent la seconde partie du lemme, concentrons nous donc sur la première.

Notons que  $\text{GL}_d \times \mathcal{F}$  est muni d'une action de  $\text{PGL}_d$  définie sur les points affinoïdes par  $g \cdot (\varphi, \mathbf{F}) = (g\varphi g^{-1}, g(\mathbf{F}))$  (strictement il faudrait insérer des recouvrements pffp ou même Zariski). Soient  $x \in X_{\mathbf{k}}(L)$  et  $\Omega$  un voisinage ouvert affinoïde de  $x$  dans  $X_{\mathbf{k}}$  assez petit de sorte que  $D \otimes_{R_{\mathbf{k}}} \mathcal{O}(\Omega)$  soit libre de rang  $d$  sur  $\mathcal{O}(\Omega)$ . Le choix d'une base de ce dernier définit alors un morphisme analytique  $\Omega \rightarrow \text{GL}_d \times \mathcal{F}$  associé à la matrice de  $\varphi$  dans cette base et à la donnée de la filtration de  $D$ . Il sera commode de le modifier un peu en

$$\mu : \text{PGL}_d \times \Omega \rightarrow \text{GL}_d \times \mathcal{F}$$

défini sur les points par  $(g, x) \mapsto g \cdot (\varphi(x), \mathbf{F}(x))$ . La propriété de  $D$  vis-à-vis des  $F$ -algèbres artiniennes locales  $B$  énoncée plus haut a plusieurs conséquences. Appliquée aux  $B$  qui sont des corps elle entraîne que  $\mu$  est injective. Si de plus un point  $z \in \text{PGL}_d \times \Omega$  est fixé, et appliquée aux épaississement infinitésimaux de  $z$ , elle entraîne que

$$\mu_z^* : \widehat{\mathcal{O}}_{\text{GL}_d \times \mathcal{F}, \mu(z)} \rightarrow \widehat{\mathcal{O}}_{\text{PGL}_d \times \Omega, z}$$

est un isomorphisme. En effet, c'est un fait général que si  $\theta : A_1 \rightarrow A_2$  est un  $F$ -morphisme local entre des  $F$ -algèbres locales noethériennes complètes telles que pour toute  $F$ -algèbre locale de dimension finie  $B$  l'application naturelle  $A_2(B) \rightarrow A_1(B)$  est bijective, alors  $\theta$  est un isomorphisme. Ce critère se vérifie bien ici car d'une part pour tout tel  $B$ -point de

$X_{\mathbf{k}}$ , les automorphismes de  $V_R \otimes B$ , ou ce qui revient au même de  $D \otimes_{R_{\mathbf{k}}} B$ , sont réduits aux scalaires  $B^\times$ , et d'autre part  $\text{PGL}_d(B) = \text{GL}_d(B)/B^*$  car  $\text{Pic}(B) = 0$ . Ainsi,  $\mu$  est injectif et un isomorphisme local formel en tout point de sa source. En particulier, le morphisme  $\mu$  est plat. Comme sa source et son but sont quasi-compacts, un résultat de Bosch-Lütkebohmert (existence de modèles formels plats) assure que  $\mu(\Omega) \subset \text{GL}_d \times \mathcal{F}$  est un ouvert admissible (quasi-compact). Comme  $\mu$  induit des isomorphismes en chaque point sur les corps résiduels, suffit de voir pour conclure que si

$$(\varphi, \mathbf{F}) \in \text{GL}_d(L) \times \mathcal{F}(L)$$

est donné, et si  $U$  en est un voisinage ouvert pour la topologie  $p$ -adique, alors  $U$  contient une paire  $(\varphi', \mathbf{F}')$  où  $\varphi'$  est semi-simple à valeurs propres  $\lambda_i \in \overline{L}$  distinctes, telles que  $\lambda_i/\lambda_j \notin p^{\mathbb{Z}}$  pour  $i \neq j$ , et dont les espaces propres dans  $\overline{L}^d$  sont en position générale par rapport à  $\mathbf{F}'$ .

Choisir un  $\varphi'$  proche de  $\varphi$  satisfaisant les deux premières conditions est immédiat, fixons le. Soit  $V \subset \mathcal{F}(L)$  un voisinage ouvert assez petit de  $\mathbf{F}$  de sorte que  $\{\varphi'\} \times V \subset U$ . Notons que  $V$  est dense dans  $\mathcal{F}(\overline{L})$  pour la topologie de Zariski de ce dernier (qui est irréductible). Il suffit pour conclure de remarquer que l'ensemble des drapeaux complets de  $\overline{L}^d$  qui sont en position générale avec un nombre fini fixé de drapeaux complets forment un ouvert Zariski : c'est standard pour un drapeau ("grosse cellule de Bruhat"), et le cas général s'en déduit par intersection finie.  $\square$

Remarquons que les relevements cristallins exhibés au (i) ci-dessus ne sont pas Zariski-denses dans  $X$ , car ils restent dans le sous-espace fermé des représentations induites d'un caractère de  $F_d$ , dont on vérifie facilement qu'il est de dimension  $d < d^2 + 1$ .

Démontrons enfin le théorème A de l'introduction. Fixons une fois pour toutes un point cristallin  $x \in X(L)$  déployé sur  $L$  donné par la proposition 4.3 (i), ainsi qu'un ouvert affinoïde  $U \subset X$  connexe et contenant  $x$ . Notons que  $X$  étant normal,  $U$  est irréductible. Soit  $W \subset U$  le fermé analytique réduit obtenu en prenant l'adhérence Zariski des points cristallins de  $U(L)$ . Les affinoïdes étant excellents et de Jacobson (voir [Con1, §1]), le lieu régulier de  $W$  est un ouvert Zariski qui est dense dans  $W$ . En particulier, il existe des points cristallins  $y \in U(L)$  qui sont réguliers dans  $W$ . Quitte à remplacer  $x$  par un tel point, nous pouvons donc supposer que  $x$  est régulier dans  $W$ . Appliquant la proposition 4.3 (ii) à un voisinage ouvert affinoïde  $\Omega$  de  $x$  dans  $U$  qui soit assez petit de sorte que  $\Omega \cap W$  soit régulier, on peut finalement supposer que  $x \in W(L)$  est cristallin générique, déployé sur  $L$ , et régulier dans  $W$ . La proposition 4.2 assure alors que  $\dim W = \dim_F T_x(W) = d^2 + 1 = \dim X$ , et donc que  $W$  contient un ouvert de  $X$  contenant  $x$ . Comme  $U$  est irréductible, cet ouvert est Zariski-dense dans  $U$ , ce qui conclut la preuve du théorème.

**4.5. Preuve de la proposition 4.2.** Fixons  $L$  une extension finie de  $\mathbb{Q}_p$  et  $x \in X(L)$  tels que

$$V_0 := \rho_x$$

est cristalline générique et déployée sur  $L$ . On notera  $k_1 < \dots < k_d$  les poids de Hodge-Tate de  $V_0$  rangés par ordre croissant. (Nous prenons pour convention que  $\mathbb{Q}_p(1)$  a pour poids de Hodge-Tate  $-1$ .) On rappelle que le  $(\varphi, \Gamma)$ -module

$$D_0 := D_{\text{rig}}(V_0)$$

est triangulin sur  $\mathcal{R}_L$  d'exactlyement  $d!$  manières différentes. Plus précisément, fixons  $\mathcal{F}$  un raffinement de  $V_0$ , c'est à dire un drapeau complet  $L[\varphi]$ -stable dans  $D_{\text{cris}}(V_0)$

$$\mathcal{F} = (\mathcal{F}_0 = \{0\} \subsetneq \mathcal{F}_1 \subsetneq \dots \subsetneq \mathcal{F}_d = D_{\text{cris}}(V_0)).$$

Il est équivalent ici de se donner un ordre  $\varphi_1, \dots, \varphi_d$  sur les valeurs propres de  $\varphi$  sur  $D_{\text{cris}}(V_0)$ ,  $\varphi$  agissant sur  $\mathcal{F}_i/\mathcal{F}_{i-1}$  par la multiplication par  $\varphi_i$ . À chaque tel  $\mathcal{F}$  est associée une triangulation

$$\mathcal{T} = (\text{Fil}_i(D_0))$$

de  $D_0$  définie comme suit. Nous avons déjà dit que d'après Berger le  $L[\varphi]$ -module  $(D_0[1/t])^\Gamma$  est canoniquement isomorphe à  $D_{\text{cris}}(V_0)$ , on pose alors

$$\text{Fil}_i(D_0) = (\mathcal{R}_L[1/t] \cdot \mathcal{F}_i) \cap D_0.$$

L'application  $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{T}$  induit alors la bijection cherchée entre raffinements de  $V_0$  et triangulations de  $D_0$ , d'après [BCh, §2.4]. Dans cette bijection, le paramètre  $(\delta_i)$  de  $\mathcal{T}$  est relié à  $\mathcal{F}$  par les formules

$$\delta_i(p) = \varphi_i p^{-k_i}, \quad \delta_i(\gamma) = \gamma^{-k_i} \quad \forall \gamma \in \mathbb{Z}_p^*,$$

(cela découle de [BCh, prop. 2.4.1] et de l'hypothèse (G3) de généralité).

Fixons  $\mathcal{F}$  un raffinement de  $V_0$  et considérons le  $(\varphi, \Gamma)$ -module triangulin sur  $\mathcal{R}_L$  associé  $(D_0, \mathcal{T})$ . L'hypothèse (G2) de généralité entraîne qu'il est régulier. Fixons enfin une rigidification  $\nu_0$  de  $(D_0, \mathcal{T})$ , ce qui nous fournit donc un point

$$x_0 = (D_0, \mathcal{T}, \nu_0) \in S_d^\square(L).$$

Soient  $\Omega \subset S_d^\square$  un voisinage ouvert affinoïde de  $x_0$  et

$$f : \Omega \rightarrow X$$

comme dans le corollaire 3.19. Quitte à remplacer  $\Omega$  par un voisinage plus petit, on peut supposer d'une part que  $f(\Omega) \subset U$  (l'ouvert  $U$  étant celui de l'énoncé de la proposition 4.2), et d'autre part que les points cristallins sont Zariski-dense dans  $\Omega(L)$  d'après le théorème 3.14. Si  $W$  est l'adhérence Zariski des points cristallins de  $U(L)$ , l'analyticité de  $f$  entraîne que

$$(4.7) \quad f(\Omega) \subset W.$$

D'autre part, si  $L[\varepsilon]$  désigne les nombres duaux sur  $L$  (de sorte que  $\varepsilon^2 = 0$ ) alors la fonction analytique  $f$  induit une application tangente (voir la fin du § 3.6)

$$df_{x_0} : \widehat{(F_d^\square)}_{x_0}(L[\varepsilon]) \longrightarrow T_x(X)$$

qui n'est autre, d'après le corollaire 3.19 appliqué aux morphismes  $\text{Sp}(L[\varepsilon]) \rightarrow \Omega$  d'image  $x_0$ , où ce qui revient au même à tous les morphismes  $\text{Sp}(L[\varepsilon]) \rightarrow S_d^\square$  d'image  $x_0$  car  $\Omega \subset S_d^\square$  est ouvert, que l'application associant à un  $c = [(D, \text{Fil}_\bullet, \nu)]$  dans  $F_d^\square(L[\varepsilon])$  et d'image  $[x_0]$  dans  $F_d^\square(L)$  l'unique déformation de  $V_0$  sur  $L[\varepsilon]$  dont le  $D_{\text{rig}}$  est isomorphe à  $D$ . Il vient que

$$T_{V_0, \mathcal{F}} := \text{Im}(df_{x_0}) \subset T_x(X)$$

est exactement le sous-espace des déformations  $\mathcal{F}$ -triangulines de  $V_0$  au sens de [BCh, §2.5] et [Ch3, §3]. En effet,  $df_{x_0}$  se factorise évidemment par le morphisme d'oubli

$$\widehat{(F_d^\square)}_{x_0}(L[\varepsilon]) \rightarrow \widehat{(F_d)}_{[(D_0, \mathcal{T})]}(L[\varepsilon]),$$

et  $V_0$  étant générique l'algèbre  $\text{End}_{(\varphi, \Gamma)/L}(D_0)$  est réduite aux homothéties d'après [Ch3, lemma 3.21], de sorte que  $\widehat{(F_d)}_{[(D_0, \mathcal{T})]}$  est le foncteur des déformations triangulines de  $(D_0, \mathcal{T})$  d'après le lemme 3.12. La relation (4.7), combinée au fait que  $W$  est fermé et  $\Omega$  réduit, assure donc que

$$T_{V_0, \mathcal{F}} \subset T_x(W)$$

pour tout raffinement  $\mathcal{F}$  de  $V_0$ . On conclut alors par le résultat crucial suivant, démontré dans [Ch3] : "Toute déformation à l'ordre 1 d'une représentation cristalline générique est combinaison linéaire de déformations triangulines".

**Théorème 4.6.** ([Ch3, Thm. C])  $T_x(X) = \sum_{\mathcal{F}} T_{V_0, \mathcal{F}}$ .



**4.7. Une généralisation.** Terminons par un énoncé plus général que nous démontrons par la même méthode. Soit  $d \geq 1$  un entier. Nous renvoyons à [Ch2] pour la notion de variété des caractères  $p$ -adiques de dimension  $d$  d'un groupe profini  $G$ . Disons simplement ici que si l'on suppose que tout sous-groupe ouvert  $U \subset G$  a la propriété que  $|\text{Hom}(U, \mathbb{F}_p)| < \infty$ , alors le foncteur  $\text{Aff} \rightarrow \text{Ens}$  associant à  $A$  l'ensemble des pseudo-caractères continus  $G \rightarrow A$  de dimension  $d$  est représentable par un espace analytique  $p$ -adique  $\mathfrak{X}$  : c'est la variété des caractères  $p$ -adiques de  $G$  de dimension  $d$ . En particulier, les points de cette variété sont en bijection avec les classes de conjugaison de représentations continues semi-simples  $G \rightarrow \text{GL}_d(\overline{\mathbb{Q}_p})$ . Dans le cas particulier  $G = \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$  on peut démontrer que  $\mathfrak{X}$  est équidimensionnel de dimension  $d^2 + 1$ , et que son lieu singulier coïncide exactement avec le lieu des représentations réductibles (avec une exception quand  $d = 2$ ) : voir [Ch5]. Des arguments similaires à ceux de la preuve du théorème A démontrent :

**Théorème 4.8.** *Soit  $\mathfrak{X}_d$  la variété des caractères  $p$ -adiques de dimension  $d$  de  $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ . Soit  $Y$  une composante irréductible de  $\mathfrak{X}_d$  et  $L$  une extension finie de  $\mathbb{Q}_p$  telle que  $Y(L)$  contiennent un point cristallin déployé absolument irréductible. Alors les points cristallins déployés de  $Y(L)$  sont Zariski-dense et d'accumulation dans  $Y$ .*

Il semble raisonnable de formuler la conjecture suivante, que l'on peut voir comme un analogue local de la conjecture de modularité de Serre.

**Conjecture 4.9.** *Toute composante irréductible de  $\mathfrak{X}_d$  contient un point cristallin absolument irréductible.*

**Corollaire 4.10.** *Si la conjecture 4.9 est vraie, alors les points cristallins sont Zariski-dense dans  $\mathfrak{X}_d$ .*

L'application "représentation résiduelle" réalise l'espace  $\mathfrak{X}$  comme réunion disjointe admissible d'espaces  $\mathfrak{X}(\bar{\rho})$  indexés par l'ensemble des représentations continues semi-simples  $\bar{\rho} : G_{\mathbb{Q}_p} \rightarrow \text{GL}_n(\overline{\mathbb{F}_p})$  prises modulo isomorphisme et action du Frobenius sur l'image. Lorsque  $\bar{\rho}$  est absolument irréductible, la composante  $\mathfrak{X}(\bar{\rho})$  est simplement l'espace défini dans l'introduction. Quand  $\bar{\rho} \not\cong \bar{\rho}(1)$  il est irréductible (c'est une boule!) et la conjecture ci-dessus est facile : c'est la proposition 4.3 (i). À défaut de pouvoir proposer un argument plausible pour la conjecture ci-dessus, démontrons le résultat suivant. Il assure que pour tout  $\bar{\rho}$ , au moins une (de l'ensemble fini) des composantes irréductibles de  $\mathfrak{X}(\bar{\rho})$  contient un point cristallin absolument irréductible.

**Proposition 4.11.** *Soit  $\bar{\rho} : G_{\mathbb{Q}_p} \rightarrow \text{GL}_d(\mathbb{F}_q)$  une représentation semi-simple continue. Il existe une extension finie  $L/\mathbb{Q}_p$  et une représentation  $G_{\mathbb{Q}_p} \rightarrow \text{GL}_d(L)$  cristalline absolument irréductible dont la représentation résiduelle est  $\bar{\rho}$ .*

Avant de procéder à la démonstration, il est raisonnable de commencer par la proposition plus simple suivante, qui est une application déjà frappante des résultats de cet article à l'existence de représentations cristallines ayant certaines propriétés. La seconde partie est à comparer avec des observations antérieures de l'auteur et Bellaïche (voir par exemple [BCh, §4] ou encore [BCh2, lemme 3.3]). Dans cet énoncé,  $r$  est une représentation semi-simple quelconque et  $L/\mathbb{Q}_p$  une extension finie de  $\mathbb{Q}_p$ .

**Proposition 4.12.** *Soient  $x \in S_d^{\square}(r)(L)$  tel que  $\delta(x) \in B_d(L)$  et  $U \subset S_d^{\square}(r)$  un voisinage de  $x$ . Pour tout réel  $C > 0$ , il existe un ouvert affinoïde  $V \subset U$  et un ensemble Zariski-dense de  $y \in V(L)$  tels que la représentation  $V_y$  soit cristalline et tels que  $\delta(y) = (\delta_i) \in \mathcal{T}(L)^d$  ait les propriétés suivantes :*

- (a) *il existe une suite strictement croissante d'entiers  $k_1, \dots, k_d$  telle que  $\delta_i(\gamma) = \gamma^{-k_i}$  pour tout  $i$  et telle que pour toute paire de parties distinctes  $I, J \subset \{1, \dots, d\}$  avec  $1 \leq |I| = |J| < d$ , on ait  $|\sum_{i \in I} k_i - \sum_{j \in J} k_j| > C$ .*

(b) pour tout  $i$ ,  $v(\delta_i(p)) = v(\delta(x)_i(p))$ ,

On peut de plus supposer que les  $V_y$  sont absolument irréductibles dans chacun des cas suivants:

- (i)  $V_x$  est absolument irréductible,
- (ii)  $x$  a la propriété que pour toute partie  $I \subset \{1, \dots, n\}$  telle que  $1 \leq |I| < n$  on ait  $\sum_{i \in I} v(\delta(x)_i(p)) \neq 0$ .

*Preuve* — Quitte à rétrécir  $U$  on peut supposer qu'il est dans l'overt affinoïde donné par la proposition 3.17, en particulier  $U \subset S_d^\square(r)$ . Considérons un voisinage  $U$  de  $x$ , ainsi que  $\iota$  et  $\Omega$  comme dans le corollaire 3.5. Quitte à rétrécir  $\Omega$  on peut supposer que les  $\delta_i(p)$ , vues comme fonctions analytiques sur  $U$ , sont chacune de valuation constante. L'existence de  $y$  satisfaisant (a) et (b) résulte alors de la proposition 3.15 et de ce que l'ensemble des suites croissantes  $(k_1, \dots, k_d)$  vues comme éléments de  $\text{Hom}(\mathbb{Z}_p^\times, L)^d$  qui satisfont la condition la condition (b) (pour un  $C$  fixé) est Zariski-dense dans  $\text{Hom}(\mathbb{Z}_p^\times, \mathbb{G}_m)^d$  et s'accumule en tous les points de  $\mathbb{Z}^d$ .

Pour le second point, il découle dans le cas (i) de la proposition 3.17 et du fait classique que si  $\rho : G \rightarrow \text{GL}_d(A)$  est une représentation d'un groupe  $G$  à valeurs dans un anneau commutatif  $A$  telle que pour un  $x \in \text{Spec}(A)$  la représentation  $\rho_x : G \rightarrow \text{GL}_d(k(x))$  évaluée en  $x$  est absolument irréductible, alors il en va de même pour tout  $\rho_y$  pour  $y$  dans un voisinage ouvert de  $x$  dans  $\text{Spec}(A)$  : en effet, il existe  $g_1, \dots, g_{d^2} \in G$  tels que  $\det(\text{trace}(\rho(g_i g_j))) \in A_x^\times$  (Wedderburn) et donc dans  $A_f^\times$  pour  $x \in D(f)$  et  $f$  bien choisie.

Dans le cas (ii), il suffit de voir que le  $D_{\text{cris}}(V_y)$  n'a pas de sous- $\varphi$ -module filtré admissible non trivial. Mais si on a un tel sous-module, disons de rang  $1 \leq r < d$ , l'égalité des extrémités de ses polygones de Hodge et Newton implique qu'il existe deux parties  $I, J \subset \{1, \dots, d\}$  avec  $|I| = |J| = r$  telles que

$$\sum_{i \in I} k_i = \sum_{j \in J} v(\varphi_j)$$

où  $\varphi_1, \dots, \varphi_d \in L^\times$  désignent les valeurs propres du Frobenius cristallin. Mais par construction (et quitte à renuméroter les  $\varphi_i$ ), on a  $\delta_i(p) = \varphi_i p^{-k_i}$  pour tout  $i$ , de sorte que l'égalité ci-dessus s'écrive aussi

$$\sum_{i \in I} v(\delta_i(p)) = \sum_{i \in I} k_i - \sum_{j \in J} k_j.$$

Mais par le (b), le terme de gauche est aussi  $\sum_{i \in I} v(\delta(x)_i(p))$ , qui est un nombre fixé disons  $C'$ . Ainsi, si on choisit  $y$  de sorte que le (a) est vérifié pour  $C > C'$ , il vient que  $I = J$ , et on obtient la contradiction voulue.  $\square$

*Preuve* — (de la proposition 4.11) Quitte à grossir  $\mathbb{F}_q$  on peut supposer que  $\bar{\rho} = \bigoplus_{i=1}^s \bar{\rho}_i$  où chaque  $\bar{\rho}_i$  est absolument irréductible. Nous allons raisonner par récurrence sur le nombre  $s$  de facteurs, le cas  $s = 1$  résultant de la proposition 4.3 (i). Pour  $s > 1$  on peut donc trouver des représentation  $L$ -cristallines  $V_1$  et  $V_2$  de représentations résiduelles respectives  $\bar{\rho}_1$  et  $\bigoplus_{i=2}^s \bar{\rho}_i$ . On pose

$$a = \dim_L V_1, \quad b = \dim_L V_2.$$

On note  $k_1 \leq k_2 \leq \dots \leq k_a$  (resp.  $k_{a+1} \leq k_{a+2} \leq \dots \leq k_d$ ) les poids de Hodge-Tate de  $V_1$  (resp.  $V_2$ ) et  $\varphi_1, \dots, \varphi_a$  (resp.  $\varphi_{a+1}, \dots, \varphi_d$ ) les valeurs propres du Frobenius cristallin de  $V_1$  (resp.  $V_2$ ). Quitte à appliquer la proposition ci-dessus (plus exactement, sa démonstration) à  $V_1$  et  $V_2$ , munis de leur raffinements respectifs associés à  $(\varphi_1, \dots, \varphi_a)$  et  $(\varphi_{a+1}, \dots, \varphi_d)$  on peut supposer que  $(k_i)$  est strictement croissante et que si

$C = \sup_i |v(\varphi_i) - k_i|$  alors pour toute paire de parties  $I \neq J \subset \{1, \dots, d\}$  avec  $|I| = |J| < d$  on ait

$$(4.8) \quad \left| \sum_{i \in I} k_i - \sum_{j \in J} k_j \right| > dC.$$

En particulier, les  $\varphi_i$  sont distincts. Considérons une extension non triviale cristalline

$$0 \longrightarrow V_1 \longrightarrow V \longrightarrow V_2 \longrightarrow 0.$$

Il y a plusieurs façons de voir qu'une telle extension existe, cela vient par exemple de ce que  $H_f^1(G_{\mathbb{Q}_p}, V_1 \otimes_L V_2^\vee)$  est de dimension au moins égale au nombre de poids de Hodge-Tate strictement négatifs de  $V_1 \otimes_L V_2^\vee$  par un résultat classique de Bloch-Kato (ici ces poids sont les  $k_i - k_j$  avec  $i \leq a$  et  $j > a$ , qui sont en fait tous strictement négatifs). Considérons la permutation  $\sigma \in \mathfrak{S}_d$  définie par  $\sigma(i) = i + a$  si  $i = 1, \dots, b$  et  $\sigma(i + b) = i$  si  $i = 1, \dots, a$ , et considérons le raffinement

$$(\varphi_{\sigma(1)}, \varphi_{\sigma(2)}, \dots, \varphi_{\sigma(d)})$$

de la représentation  $V$ . Soit  $\tau \in \mathfrak{S}_d$  la permutation telle que  $(k_{\tau(1)}, k_{\tau(2)}, \dots, k_{\tau(d)})$  est la suite des sauts de la filtration de Hodge de  $D_{\text{cris}}(V)$  définie par  $\mathcal{F}$  (voir [BCh, §2.4]). Il nous suffira ici de dire que si  $(D, \mathcal{T})$  est le  $(\varphi, \Gamma)$ -module triangulin associé à  $(V, \mathcal{F})$ , alors ses paramètres  $\delta_i$  vérifient

$$\delta_i(p) = \varphi_{\sigma(i)} p^{-k_{\tau(i)}}, \quad \delta_i(\gamma) = \gamma_i^{-k_{\tau(i)}} \quad \forall \gamma \in \mathbb{Z}_p^\times.$$

Soit  $D' \subset D$  l'unique sous- $(\varphi, \Gamma)$ -module cristallin saturé dont les valeurs propres du Frobenius cristallin sont les  $\varphi_i$  avec  $a+1 \leq i \leq b$ . L'application naturelle  $\eta : D' \rightarrow D_{\text{rig}}(V_2)$  est injective (c'est un isomorphisme sur les  $D_{\text{cris}}$ ) et on constate que l'on a l'inégalité pour l'ordre lexico-graphique

$$(\tau(1), \tau(2), \dots, \tau(b)) \leq (a+1, a+2, \dots, d).$$

Cette inégalité est une égalité si et seulement si  $\eta$  est surjective, ce qui ne se produit pas car  $V$  est non scindée. C'est donc une inégalité stricte, de sorte qu'il existe un  $1 \leq i_0 \leq b$  tel que  $\tau(i_0) \leq a$ , et en particulier

$$\tau(i_0) \leq a < \sigma(i_0).$$

Nous allons appliquer une variante de la proposition précédente cas (i) et (ii) au point  $x = (D, \mathcal{T}, \nu)$  pour un choix quelconque de  $\nu$ . Cette proposition permettrait de conclure si nous savions que pour toute partie  $I \subset \{1, \dots, d\}$  telle que  $1 \leq |I| \leq d-1$  alors  $\sum_{i \in I} v(\delta_i(p)) \neq 0$ . Cela n'est pas toujours satisfait dans notre cas, mais  $U$  n'ayant que deux facteurs irréductibles c'est un exercice de vérifier que si aucune des représentations  $V_y$  donnée par cette proposition n'est absolument irréductible (pour  $y$  assez proche de  $x$ ), alors elles ont toutes un constituant de dimension  $\dim(V_1) = a$ . La théorie de Sen en famille, appliquée à la famille donnée par la proposition 3.17, permet d'identifier ses poids de Hodge-Tate : si ceux de  $V_y$  rangés en ordre croissant sont les  $k'_i$ , le (ou un si  $a = b$ ) constituant de dimension  $a$  a pour poids de Hodge-Tate les  $k'_{\tau^{-1}(i)}$  pour  $i = 1, \dots, a$ . Par conséquent, l'argument de la preuve de la proposition ci-dessus montre qu'il suffit dans notre cas de vérifier que  $\sum_{i \in I} v(\delta_i(p)) \neq 0$  quand  $I = \tau^{-1}(\{1, \dots, a\})$ . Mais

$$\left| \sum_{i \in I} v(\delta_i(p)) - \left( \sum_{i \in \sigma(I)} k_i - \sum_{i \in \tau(I)} k_i \right) \right| < dC.$$

Par la relation (4.8), il suffit pour conclure de voir que  $\sigma(I) \neq \tau(I)$ , c'est à dire que  $\sigma\tau^{-1}(\{1, \dots, a\}) \neq \{1, \dots, a\}$ . On conclut car  $\tau(i_0) \leq a$  et  $\sigma(i_0) > a$ .  $\square$

**Remarque 4.13.** Notons qu'il ressort de la démonstration que le corps de définition  $L$  peut être précisé dans l'énoncé de la proposition 4.11. Par exemple, si  $\bar{\rho}$  est la représentation triviale, alors on peut choisir  $L = \mathbb{Q}_p$ .

## RÉFÉRENCES

- [BCh] J. Bellaïche & G. Chenevier, *Families of Galois representations and Selmer groups*, Astérisque 324, Soc. Math. France (2009).
- [BCh2] J. Bellaïche & G. Chenevier, *The sign of Galois representations attached to automorphic forms for unitary groups*, à paraître à Compositio Math.
- [Ben] D. Benois, *A generalization of Greenberg's  $\mathcal{L}$ -invariant*, prépublication disponible sur ArXiv (2009).
- [Be1] L. Berger, *Représentations  $p$ -adiques et équations différentielles*, Invent. Math. 148 No. 2 (2002), 219–284.
- [Be2] L. Berger, *Équations différentielles  $p$ -adiques et  $(\phi, N)$ -modules filtrés*, Représentations  $p$ -adiques de groupes  $p$ -adiques. I. Représentations galoisiennes et  $(\phi, \Gamma)$ -modules. Astérisque No. 319 (2008), 13–38.
- [BeCh] L. Berger & G. Chenevier, *Représentations potentiellement triangulines de dimension 2*, à paraître au Journal de théorie des nombres de Bordeaux.
- [BeCo] L. Berger & P. Colmez, *Familles de représentations de de Rham et monodromie  $p$ -adique*, Astérisque 319 (2008), 303–337.
- [BGR] S. Bosch, U. Güntzer & R. Remmert, *Non-archimedean analysis*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Vol. 261, Springer-Verlag (1984).
- [Ch1] G. Chenevier, *Variétés de Hecke des groupes unitaires et représentations galoisiennes*, Cours Peccot, Collège de France (2008), disponible à l'adresse <http://www.math.polytechnique.fr/~chenevier/courspeccot.html>.
- [Ch2] G. Chenevier, *The  $p$ -adic analytic space of pseudo-characters of a profinite group, and pseudo-representations over arbitrary rings*, prépublication disponible sur ArXiv (2008).
- [Ch3] G. Chenevier, *On the infinite fern of Galois representations of unitary type*, prépublication disponible sur ArXiv (2009).
- [Ch4] G. Chenevier, *Une application des variétés de Hecke des groupes unitaires*, prépublication (04/2009) disponible à l'adresse <http://www.math.polytechnique.fr/~chenevier/pub.html>, à paraître dans "Stabilisation de la formule des traces, variétés de Shimura, et applications arithmétiques" tome 2.
- [Ch5] G. Chenevier, *Sur la variété des caractères  $p$ -adiques de  $G_K$  où  $K$  est une extension finie de  $\mathbb{Q}_p$* . Notes disponibles sur demande.
- [C] R. Coleman,  *$p$ -adic Banach spaces & families of modular forms*, Invent. Math. 127 (1997), 417–479.
- [CM] R. Coleman & B. Mazur, *The eigencurve*, in Galois representations in Arithmetic Algebraic Geometry (Durham, 1996), London. Math. Soc. Lecture Notes 254, Cambridge univ. press (1998).
- [Co1] P. Colmez, *Représentations triangulines de dimension 2*, Astérisque 319 (2008), 213–258.
- [Co2] P. Colmez, *Représentations de  $GL_2(\mathbb{Q}_p)$  et  $(\varphi, \Gamma)$ -modules*, Astérisque 330 (2010), 281–509.
- [Co3] P. Colmez, *Invariants  $L$  et dérivées de valeurs propres de Frobenius*, Astérisque 331 (2010), 13–28.
- [Con1] B. Conrad, *Irreducible components of rigid spaces*, Ann. Inst. Fourier 49 (1999), 473–541.
- [Con2] B. Conrad, *Relative ampleness in rigid-analytic geometry*, Ann. Inst. Fourier 56 (2006), 1049–1126.
- [He1] L. Herr, *Sur la cohomologie galoisienne des corps  $p$ -adiques*, Bull. Soc. Math. France 126 (1998).
- [He2] L. Herr, *Une approche nouvelle de la dualité locale de Tate*, Math. Ann. 320 (2001).
- [Ke] K. Kedlaya, *Slope filtrations and  $(\varphi, \Gamma)$ -modules in families*, cours au trimestre Galoisien à l'Institut Henri Poincaré, Paris, disponible à l'adresse <http://math.mit.edu/~kedlaya/papers/families.pdf>.
- [KeL] K. Kedlaya & R. Liu, *On families of  $(\varphi, \Gamma)$ -modules*, à paraître à Algebra and Number Theory (2010), disponible sur ArXiv.
- [K1] M. Kisin, *Overconvergent modular forms and the Fontaine-Mazur conjecture*, Invent. Math. 153 (2003), 373–454.
- [K2] M. Kisin, *Potentially semi-stable deformation rings*, J.A.M.S. 21 (2008), 513–546.
- [K3] M. Kisin, *Deformations of  $G_{\mathbb{Q}_p}$  and  $GL_2(\mathbb{Q}_p)$  representations*, Astérisque 330 (2010), 511–528.
- [L] R. Liu, *Cohomology and duality for  $(\phi, \Gamma)$ -modules over the Robba ring*, Int. Math. Res. Not. no. 3 (2008).
- [Ma1] B. Mazur, *Deforming Galois representations*, Galois groups over  $\mathbb{Q}$  (Berkeley, CA, 1987), 385–437, Math. Sci. Res. Inst. Publ., 16, Springer, New York, 1989.
- [Ma2] B. Mazur, *An "infinite fern" in the universal deformation space of Galois representations*, Journées Arithmétiques (Barcelona, 1995). Collect. Math. 48 (1997), no. 1-2, 155–193.
- [Na] K. Nakamura, *Déformations of trianguline  $B$ -pairs and Zariski-density of two-dimensional crystalline representations*, prépublication disponible sur ArXiv (2010).

- [S] P. Schneider, *Nonarchimedean functional analysis*, Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin (2002).
- [ST] P. Schneider & J. Teitelbaum, *Algebras of  $p$ -adic distributions and admissible representations*, Invent. Math. 153 (2003), no. 1, 145–196.
- [Ta] J. Tate, *Duality theorems in Galois cohomology over number fields*, Proc. Int. Congress Math. Stockholm (1962).

GAËTAN CHENEVIER, C.N.R.S, CENTRE DE MATHÉMATIQUES LAURENT SCHWARTZ, ÉCOLE POLYTECHNIQUE, 91128 PALAISEAU CEDEX, FRANCE. CHENEVIER@MATH.POLYTECHNIQUE.FR